C. DINESCU B. SĂVULESCU

METODE DE MATEMATICĂ MODERNĂ PENTRU ECONOMIE

culegere de probleme

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

C. DINESCU B. SĂVULESCU

METODE DE MATEMATICĂ MODERNĂ PENTRU ECONOMIE

culegere de probleme

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — 1975

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea a fost elaborată astfel :

C. DINESCU : Cap. II, IV

B. SĂVULESCU : Cap. I, III

Referent ştiinţific : conf. dr. **ION VĂDUVA**

Redactor : STAVINSCHI MAGDALENA IOLANDA

Tehnoredactor : DUMITRAŞCU SANDA

Grafician : SÎRBU NICOLAE

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Lucrarea de față, prezentată sub forma unei culegeri de probleme, este de fapt o continuare a lucrării „Probleme ale cercetării operaționale", elaborată de către autori sub egida aceleiași edituri.

De această dată, sînt rezolvate noi probleme puse de practica economică, cum ar fi cele de programarea și planificarea resurselor, în cazul cînd modelele corespunzătoare nu mai sînt liniare și nu poate fi folosită direct tehnica simplex, unele modele care pot fi rezolvate cu tehnici specifice teoriei rețelelor, probleme care cer optimizarea volumului producției în funcție de anumite cereri, probleme care cer optimizarea așteptărilor între fazele procesului de producție și altele tot așa de importante.

Concepută pe patru capitole, lucrarea se prezintă astfel:

Capitolul întîi prezintă algoritmi și modul lor de aplicare pe un număr însemnat de probleme pentru care modelele matematice respective sînt neliniare, probleme care cer programe optime în numere întregi, probleme în care obiectivul se modifică în funcție de volumul producției, sau probleme care cer deodată optimizarea mai multor componente ale producției.

Metodele folosite au în vedere reducerea problemelor date spre rezolvare la probleme de programare liniară, pentru a fi utilizată tehnica simplex, destul de familiară multor cercetători din economie și tehnică.

Capitolul doi abordează o clasă importantă de probleme întîlnite în practica de producție, pentru a căror rezolvare sînt folosite tehnici specifice teoriei rețelelor. Astfel, sînt rezolvate probleme de optimizarea fluxurilor de producție cu restricții de capacitate și de cost, probleme de repartiții optime în procesul de producție, probleme de organizare și conducere a unor proiecte de activități complexe, probleme de înlocuirea optimă a echipamentelor, probleme de determinarea succesiunilor optime de faze ținînd seama de anumite condiții și altele.

Capitolele trei și patru rezolvă probleme legate de două componente importante ale producției, optimizarea stocurilor de produse astfel încît să satisfacem anumite cereri implicînd cheltuieli totale minime și optimizarea timpului de așteptare între fazele unui proces de producție.

Lucrarea astfel concepută poate fi utilizată de toți studenții de la facultățile economice și tehnice (curs de zi, seral și fără frecvență), care

Scanned with OKEN Scanner

au în programul lor cursuri de cercetare operațională, ea fiind un îndrumar prețios pentru seminarii și lucrări practice. De asemenea, lucrarea este utilă pentru acei specialiști din cercetare și producție, care sînt confruntați cu optimizarea unor probleme complexe puse de practică.

Am vrea să mai adăugăm că materialul prezentat în lucrare vine să completeze lucrările „Modele de organizarea și conducerea producției", scoase tot sub egida Editurii didactice și pedagogice, în anul 1974, în sensul că cititorul găsește exemple variate rezolvate cu algoritmii și metodele prezentate în lucrările menționate.

În încheiere am vrea să subliniem că vom fi recunoscători celor care prin sugestiile lor ne vor ajuta să ne îndreptăm eforturile spre îmbunătățirea viitoare a acestui gen de lucrări.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

PROBLEME CARE FOLOSESC TEHNICA SIMPLEX

1. PROBLEME CARE CER PROGRAME OPTIME ÎNTREGI

Multe probleme ce apar spre rezolvare în practică se reduc la modele de programare liniară în care nu pot fi luate în considerație decît programele (soluțiile) cu valori întregi ale variabilelor. Forma generală a unui astfel de model este următoarea:

$$[\text{opt}]\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad , \; i = 1,2,\ldots,s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad , \; i = s+1, s+2,\ldots,t,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , \; i = t+1, t+2,\ldots,m,$$

$$x_j \in N \quad , \; j = 1,2,3,\ldots,n,$$

unde $N^* = \{0,1,2,3,\ldots.\}$. Menționăm că în condițiile în care atît coeficienții a_{ij}, cît și termenii liberi b_i ai restricțiilor sînt întregi (ceea ce se poate realiza ușor), odată cu variabilele structurale ale problemei, variabilele de compensare ce se introduc în aceste restricții trebuie să se supună și ele condiției de a lua valori întregi.

În problemele ce urmează, se folosesc două metode de determinare a programelor optime întregi ale unui model liniar. În continuare, vom descrie etapele acestor metode, precum și particularitățile de calcul legate de aplicarea lor.

a) *Metoda planului de secțiune* (*algoritmul lui Gomory*) cere parcurgerea următoarelor etape:

Etapa 1. Construim și rezolvăm modelul obținut din cel dat, prin înlocuirea condițiilor de integritate ($x_j \in N^*$) cu condiții de nenegativitate ($x_j \geqslant 0$). Dacă soluția optimă a acestui model are toate componentele întregi, algoritmul ia sfîrșit, această soluție fiind optimă și pentru modelul dat. În caz contrar, trecem la etapa următoare.

Etapa 2. Fixîndu-ne atenția asupra unei componente neîntregi a soluției optime din modelul rezolvat anterior, extragem restricția corespunzătoare ei

Scanned with OKEN Scanner

din tabelul de optim și din ea generăm o nouă restricție, efectuînd următoarele operații:

— din fiecare coeficient al restricției scădem partea întreagă a sa;

— din termenul liber, considerat în partea dreaptă, scădem partea întreagă a sa;

— înlocuim semnul de egalitate prin semnul $\geqslant$.

Amintim că partea întreagă a unui număr x, notată prin $[x]$, se definește ca întregul cel mai mare conținut în acel număr, astfel încît diferența $x-[x]$ să fie cuprinsă în intervalul $[0, 1]$. De exemplu:

$$[3{,}6] = 3, \text{ deoarece: } 3{,}6 - 3 = 0{,}6 \in [0, 1],$$

$$[-4{,}3] = -5, \text{ deoarece: } -4{,}3 - (-5) = 0{,}7 \in [0, 1].$$

Etapa 3. Rezolvăm un nou model, cu aceeași funcție de eficiență și ale cărui restricții sînt cele ale modelului anterior, la care se adaugă restricția generată la etapa 2. Dacă soluția optimă a acestui model are toate componentele întregi, algoritmul ia sfîrșit, ea fiind soluția optimă și pentru modelul dat. În caz contrar, repetăm etapele 2 și 3 pe noul model, referindu-ne la o componentă întreagă a soluției sale optime.

Etapele 2 și 3 se repetă pînă cînd se obține o soluție optimă cu toate componentele întregi.

O b s e r v a ț i e. Restricția suplimentară, generată la etapa 2, are rolul de a înlătura, din mulțimea soluțiilor posibile ale modelului precedent, o parte ce conține soluția cu componente neîntregi obținută anterior, păstrînd însă toate soluțiile cu componente întregi ale modelului.

În ceea ce privește rezolvarea modelului obținut la etapa 3, prin adăugarea restricției suplimentare la sistemul de restricții al modelului anterior, aceasta se poate realiza reluînd calculele de la tabelul de optim precedent, în care introducem direct o linie corespunzătoare noii restricții, prelucrate în prealabil în unul din următoarele două moduri:

(1) Introducem în restricția adăugată o variabilă de compensare și una artificială, aceasta din urmă intrînd și în funcția de eficiență cu un coeficient de penalizare. În acest mod, după completarea tabelului cu linia corespunzătoare acestei restricții, se continuă calculele cu algoritmul simplex-primal, vectorul artificial eliminîndu-se din bază.

(2) Schimbăm semnele în restricția nou adăugată, ea devenind inecuație cu sensul $\leqslant$. Vom introduce deci numai o variabilă de compensare. Deoarece termenul liber al restricției suplimentare a devenit negativ, după completarea tabelului cu linia corespunzătoare ei, vom continua calculele aplicînd algoritmul simplex-dual.

b) *Metodă de tip combinatorial* (*Branch and Bound*).

Etapa 1. Construim și rezolvăm modelul obținut din cel dat, prin înlocuirea condițiilor de integritate ($x_j \in N^*$) cu condiția de nenegativitate ($x_j \geqslant 0$). Dacă soluția optimă a acestui model are toate componentele întregi, algoritmul ia sfîrșit, soluția respectivă fiind optimă și pentru modelul dat. În caz contrar, trecem la etapa următoare.

Scanned with OKEN Scanner

Etapa 2. Ne fixăm atenția asupra unei componente neîntregi a soluției optime corespunzătoare modelului rezolvat anterior, considerînd-o cuprinsă între doi întregi consecutivi. Fie că această componentă, notată cu x_s, îndeplinește condițiile:

$$k < x_s < k+1.$$

Pornind de la modelul ajutător rezolvat, deosebim pentru modelul dat două alternative, construind și rezolvînd alte două modele ajutătoare, formate prin adăugarea la restricțiile modelului anterior a unei restricții suplimentare de forma:

$$x_s \leqslant k, \text{ respectiv: } x_s \geqslant k+1.$$

Dintre aceste modele, ne oprim asupra aceluia care dă o valoare optimă a funcției de eficiență cît mai mare (la problemele de maxim), respectiv cît mai mică (la problemele de minim). Dacă soluția lui optimă are toate componentele întregi, algoritmul ia sfîrșit, această soluție fiind program optim pentru modelul dat. În caz contrar, considerăm o componentă neîntreagă a soluției respective și pornind de la acest model repetăm etapa a doua, construind și rezolvînd alte două modele ajutătoare.

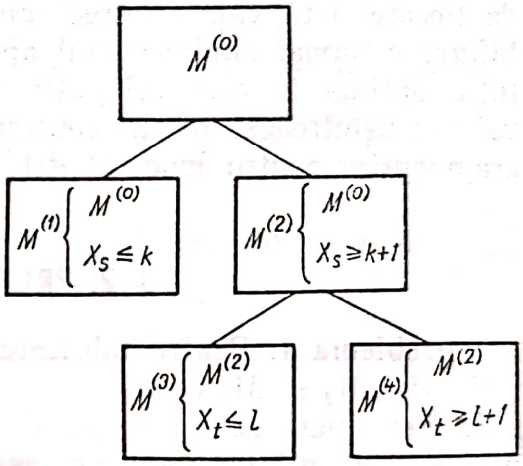


Fig. I.1

Continuînd în mod asemănător, se construiește un arbore ca cel din figura I.1, în vîrfurile căruia se găsesc modelele ajutătoare.

În procesul de construire a arborelui, se continuă de fiecare dată cu modelul pentru care valoarea maximă (respectiv minimă) a funcției de eficiență este cea mai mare (respectiv cea mai mică), față de toate valorile optime ale funcției de eficiență, pentru toate modelele ce se găsesc în extremitățile terminale ale diferitelor ramificații apărute. Procesul descris se termină atunci cînd modelul ajutător cu care ar trebui să continuăm are o soluție optimă cu toate componentele întregi, această soluție furnizînd un program optim pentru modelul inițial.

În ceea ce privește rezolvarea efectivă a unui model ajutător, ce se construiește în decursul aplicării algortimului, ea se poate uneori realiza reluînd calculele de la secțiunea de optim (sau o secțiune intermediară) a tabelului de rezolvare a modelului precedent și anume acolo unde se poate introduce restricția nou adăugată.

De asemenea, menționăm că adăugarea la sistemul de restricții al unui model a unei restricții de forma următoare:

$$x_s \geqslant k+1$$

se poate realiza ușor, prin înlocuirea variabilei x_s printr-o nouă variabilă, de forma:

$$y_s = x_s - (k+1).$$

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, restricția nou adăugată se transformă într-o simplă condiție de nenegativitate a noii variabile. Mai mult, se observă că prin înlocuirea în sistemul de restricții a lui x_s prin valoarea $y_s+(k+1)$, matricea coeficienților din sistemul de restricții se păstrează, modificîndu-se numai vectorul termenilor liberi. Astfel se poate relua rezolvarea de la secțiunea de optim a modelului precedent, folosind metoda de reoptimizare, în cazul în care se modifică vectorul termenilor liberi. În sfîrșit, uneori se adaugă succesiv la un model două restricții de forma:

$$y_s \geqslant l \text{ și } y_s \leqslant l,$$

acestea putînd fi înlocuite prin egalitatea evidentă. În acest caz numărul variabilelor modelului scade cu o unitate.

O b s e r v a ț i e. Metoda descrisă mai sus poate fi folosită și în cazul în care o parte a variabilelor trebuie să ia valori întregi. În acest caz, considerăm de fiecare dată valori întregi ale acestor variabile și vom aplica procesul de bifurcare numai cînd modelul ajutător cu care trebuie să continuăm are o soluție optimă în care cel puțin uneia din variabilele urmărite îi corespunde o valoare neîntreagă. În caz contrar, soluția optimă a acestui model dă un program optim pentru modelul dat.

§ 2. PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Pentru fabricarea unor piese, se pot folosi trei tipuri de mașini, M_1, M_2 și M_3 ce se găsesc în întreprindere și se folosesc în alte scopuri. Cele trei tipuri de mașini se deosebesc prin numărul de piese pe care îl pot produce pe unitatea de timp, egal respectiv cu 75, 83 și 90. Se apreciază că prin trecerea unei mașini de la locul său de muncă la fabricarea noilor piese, se efectuează cheltuieli în valoare de 5, 7 și 7 unități bănești, respectiv pentru cele trei tipuri de mașini (în aceste cheltuieli intră și costul producției pierdute la vechiul loc de muncă). Să se indice cîte mașini de fiecare tip trebuie folosite la fabricarea noilor piese, astfel încît ele să poată produce împreună cel puțin 1000 piese pe unitate de timp, numărul lor total să nu depășească 13 mașini, iar cheltuielile efectuate cu trecerea la noul lor loc de muncă să fie minime.

Rezolvare. Vom nota cu x_1, x_2 și x_3 numărul de mașini respectiv de tipul M_1, M_2 și M_3 ce se vor folosi la fabricarea noilor piese. Cu aceste notații, modelul matematic al problemei are următoarea formă:

$$(M)\begin{cases}[\min] z = 5x_1 + 7x_2 + 7x_3, \\ 75x_1 + 83x_2 + 90x_3 \geqslant 1000, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 13, \\ x_j \in N^*, \ j = 1,2,3.\end{cases}$$

Modelul ajutător $M^{(0)}$, obținut din M prin înlocuirea condițiilor de integritate cu condiții de nenegativitate, este rezolvat în tabelul I.1.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.1

c_B	B	d	5	7	7	0	M	0	θ	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
M	a_5	1000	75	83	[90]	— 1	1	0	100/9	
0	a_6	13	1	1	1	0	0	1	13	S_0
	z_j-c_j	—	$75M-5$	$83M-7$	$90M-7$	$-M$	0	0	—	
7	a_3	100/9	5/6	83/90	1	—1/90	1/90	0	40/3	
0	a_6	17/9	[1/6]	7/90	0	1/90	—1/90	0	34/3	S_1
	z_j-c_j	—	5/6	—49/90	0	—7/90	X	0	—	
7	a_3	5/3	0	8/15	1	—1/15	1/15	—5		
5	a_1	34/3	1	7/15	0	1/15	—1/15	6		S_2
	z_j-c_j		0	—14/15	0	—2/15	X	—5	—	

Considerînd componenta neîntreagă $x_3=\frac{5}{3}$ a soluției optime a modelului $M^{(0)}$, extragem restricția ei din secțiunea S_2 a tabelului:

$$\frac{8}{15}x_2+x_3-\frac{1}{15}x_4-5x_6=\frac{5}{3}.$$

Aplicînd acestei restricții operațiile etapei a doua a algoritmului lui Gomory, obținem restricția suplimentară ce urmează:

$$\frac{8}{15}x_2+\frac{14}{15}x_4\geqslant\frac{2}{3}.$$

Cu această restricție, completăm un nou model ajutător, scris simbolic astfel:

$$(M^{(1)})\begin{cases} M^{(0)}, \\ \frac{8}{15}x_2+\frac{14}{15}x_4\geqslant\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Schimbînd semnele la restricția nou adăugată și introducînd o variabilă de compensare, ea se poate atașa secțiunii S_2 a tabelului I.2, după care se continuă calculele prin aplicarea algoritmului simplex-dual. Acest lucru este realizat în tabelul I.2, care conduce la o soluție optimă cu componente neîntregi a modelului $M^{(1)}$. Considerînd componenta neîntreagă $x_3=12/7$ a acestei soluții, construim un nou model ajutător, adăugînd la cel anterior o restricție suplimentară, dedusă prin aplicarea etapei a doua a algoritmului lui Gomory asupra primei restricții din secțiunea S_4 a tabelului I.2.

$$(M^{(2)})\begin{cases} M^{(1)}, \\ \frac{4}{7}x_2+\frac{13}{14}x_7\geqslant\frac{5}{7}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.2

c_B	B	d	5	7	7	0	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	
7	a_3	5/3	0	8/15	1	—1/15	—5	0	
5	a_1	34/3	1	7/15	0	1/15	6	0	S_3
0	a_7	—2/3	0	—8/15	0	**—14/15**	0	1	
	$z_j - c_j$	—	0	—14/15	0	—2/15	—5	0	
7	a_3	12/7	0	4/7	1	0	—5	—1/14	
5	a_1	79/7	1	3/7	0	0	6	1/14	S_4
0	a_4	5/7	0	4/7	0	1	0	—15/14	
	$z_j - c_j$	—	0	—6/7	0	0	—5	—1/7	

Tabelul I.3

c_B	B	d	5	7	7	0	0	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	
7	a_3	12/7	0	4/7	1	0	—5	—1/14	0	
5	a_1	79/7	1	3/7	0	0	6	1/14	0	S_5
0	a_4	5/7	0	4/7	0	1	0	—15/14	0	
0	a_8	—5/7	0	—4/7	0	0	0	**—13/14**	1	
	$z_j - c_j$	—	0	—6/7	0	0	—5	—1/7	0	
7	a_3	23/13	0	8/13	1	0	—5	0	—1/13	
5	a_1	146/13	1	5/13	0	0	6	0	1/13	
0	a_4	20/13	0	16/13	0	1	0	0	—15/13	S_6
0	a_7	10/13	0	8/13	0	0	0	1	—14/13	
	$z_j - c_j$	—	0	—10/13	0	0	—5	0	—2/13	

Rezolvarea acestui model este făcută în tabelul I.3, folosind aceeași metodă ca mai sus. Deoarece nici soluția optimă a modelului $M^{(2)}$ nu are componentele întregi, considerăm o componentă neîntreagă a acestei soluții, de pildă $x_3=23/13$ și cu ajutorul restricției corespunzătoare ei din secțiunea S_6 a tabelului I.3 construim un nou model ajutător:

$$[M^{(3)}] \begin{cases} M^{(2)}, \\ \frac{8}{13} x_2 + \frac{12}{13} x_8 \geqslant \frac{10}{13}. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui model este făcută în tabelul I.4.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.4

c_B	B	d	5	7	7	0	0	0	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	a_9	
7	a_3	23/13	0	8/13	1	0	—5	0	—1/13	0	
5	a_1	146/13	1	5/13	0	0	6	0	1/13	0	
0	a_4	20/13	0	16/13	0	1	0	0	—15/13	0	S_7
0	a_7	10/13	0	8/13	0	0	0	1	—14/13	0	
0	a_9	10/13	0	—8/13	0	0	0	0	**—12/13**	1	
	$z_j—c_j$	—	0	—10/13	0	0	—5	0	—2/13	0	
7	a_3	11/6	0	2/3	1	0	—5	0	0	—1/12	
5	a_1	67/6	1	1/3	0	0	6	0	0	1/12	
0	a_4	5/2	0	2	0	1	0	0	0	—5/4	S_8
0	a_7	5/3	0	4/3	0	0	0	1	0	—7/6	
0	a_8	5/6	0	2/3	0	0	0	0	1	—13/12	
	$z_j—c_j$	—	0	—2/3	0	0	—5	0	0	—1/6	

Considerînd componenta neîntreagă $x_3=11/6$ a soluției lui $M^{(3)}$, construim un nou model ajutător care are următoarea formă:

$$[M^{(4)}] \begin{cases} M^{(3)} \\ \dfrac{2}{3}x_2 + \dfrac{11}{12}x_9 \geqslant \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui model este realizată în tabelul I.5.

Tabelul I.5

c_B	B	d	5	7	7	0	0	0	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
7	a_3	11/6	0	2/3	1	0	—5	0	0	—1/12	0
5	a_1	67/6	1	1/3	0	0	6	0	0	1/12	0
0	a_4	5/2	0	2	0	1	0	0	0	—5/4	0
0	a_7	5/3	0	4/3	0	0	0	1	0	—7/6	0
0	a_8	5/6	0	2/3	0	0	0	0	1	—13/12	0
0	a_{10}	—5/6	0	—2/3	0	0	0	0	0	**—11/13**	1
$z_j—c_j$		—	0	—2/3	0	0	—5	0	0	—1/6	0
7	a_3	21/11	0	8/11	1	0	—5	0	0	0	—1/11
5	a_1	122/11	1	3/11	0	0	6	0	0	0	1/11
0	a_4	40/11	0	32/11	0	1	0	0	0	0	—15/11
0	a_7	30/11	0	24/11	0	0	0	1	0	0	—14/11
0	a_8	20/11	0	16/11	0	0	0	0	1	0	—13/11
0	a_9	10/11	0	8/11	0	0	0	0	0	1	—12/11
$z_j - c_j$		—	0	—6/11	0	0	—5	0	0	0	—2/11

Scanned with OKEN Scanner

Pornind de la componenta neîntreagă $x_3=21/11$ a soluției lui $M^{(4)}$, se construiește următorul model:

$$[M^{(5)}] \begin{cases} M^{(4)} \\ \frac{8}{11}x_2 + \frac{10}{11}x_{10} \geqslant \frac{10}{11}. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui model este realizată în tabelul I.6, din care rezultă că el are o singură soluție optimă cu toate componentele întregi. Această soluție furnizează deci unicul program optim pentru modelul inițial, acest program indicînd 11 mașini de tipul M_1 și două mașini de tipul M_3 ce trebuie folosite pentru producerea noilor piese.

Tabelul I.6

c_B	B	d	5	7	7	0	0	0	0	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
7	a_3	21/11	0	8/11	1	0	−5	0	0	0	−1/11	0
5	a_1	122/11	1	3/11	0	0	6	0	0	0	1/11	0
0	a_4	40/11	0	32/11	0	1	0	0	0	0	−15/11	0
0	a_7	30/11	0	24/11	0	0	0	1	0	0	−14/11	0
0	a_8	20/11	0	16/11	0	0	0	0	1	0	−13/11	0
0	a_9	10/11	0	8/11	0	0	0	0	0	1	−12/11	0
0	a_{11}	10/11	0	−8/11	0	0	0	0	0	0	−10/11	1
$z_j - c_j$		—	0	−6/11	0	0	−5	0	0	0	−2/11	0
7	a_3	2	0	4/5	1	0	−5	0	0	0	0	−1/11
5	a_1	11	1	1/5	0	0	6	0	0	0	0	1/10
0	a_4	5	0	4	0	1	0	0	0	0	0	−3/2
0	a_7	4	0	16/5	0	0	0	1	0	0	0	−7/5
0	a_8	3	0	12/5	0	0	0	0	1	0	0	−13/10
0	a_9	2	0	8/5	0	0	0	0	0	1	0	−6/5
0	a_{10}	1	0	4/5	0	0	0	0	0	0	1	−11/10
$z_j - c_j$		—	0	−2/5	0	0	−5	0	0	0	0	−2/5

Problema 2. Pentru fabricarea a patru tipuri de piese (indivizibile), notate prin P_1, P_2, P_3 și P_4, se folosesc trei tipuri de materie primă, notate prin M_1, M_2 și M_3, ale căror rezerve sînt limitate. Consumurile specifice ale celor patru tipuri de piese din cele trei tipuri de materie primă, cantitățile disponibile din aceste materii prime, precum și cîștigurile nete realizate din producerea și vinderea a cîte unei unități din fiecare tip de piesă sînt date în tabelul I.7.

a) Să se determine un plan optim de producție, care în condițiile date să conducă la un cîștig total maxim.

b) Dintre toate planurile de producție, să se determine cel care conduce la cel mai mic consum de materie primă M_3.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dintre toate planurile optime de producție, să se determine unul care conduce la o cantitate totală de piese fabricate cît mai mică, stocarea acestora pînă la vînzare punînd probleme deosebite.

Tabelul I.7

Tip piese / Materii prime	P_1	P_2	P_3	P_4	Disp.
M_1	3	4	3	2	200
M_2	2	1	3	5	100
M_3	4	3	2	6	250
Cîștig	5	5	6	7	—

d) Existînd mai multe planuri optime de producție, în care cantitatea totală de piese fabricate este cît mai mică, să se determine dintre acestea planul care dă cantități cît mai apropiate de piese fabricate din tipurile M_3 și M_4.

Rezolvare. a) Dacă notăm cu x_1, x_2, x_3 și x_4 cantitățile ce se fabrică respectiv din tipurile P_1, P_2, P_3 și P_4, un plan optim de producție trebuie să fie soluție a următorului model matematic:

$$[\max]\ z = 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4,$$

$$(M)\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 200, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leqslant 100, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leqslant 250, \\ x_j \in N^*,\ j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Modelul ajutător $M^{(0)}$, obținut din M prin înlocuirea condițiilor de integritate cu cele de nenegativitate este rezolvat în tabelul I.8, din care se vede că modelul $M^{(0)}$ are trei soluții de bază optime, dintre care una are toate componentele întregi, aceasta furnizînd și un program optim pentru modelul M.

b) Toate soluțiile optime ale modelului $M^{(0)}$ se pot scrie ca o combinație liniară convexă a celor trei soluții de bază optime, sub forma ce urmează:

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 = 40\,\lambda, \\ x_2 = 20\,\lambda + \frac{100}{3}\,\mu + \frac{400}{9}\,\nu, \\ x_3 = 200/9\,\mu, \\ x_4 = \frac{100}{9}\,\nu, \\ x_5 = x_6 = 0, \\ x_7 = 30\,\lambda + \frac{950}{9}\,\mu + 50\,\nu, \\ z_{max} = 300, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.8

C_B	B	d	5 a_1	5 a_2	6 a_3	7 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	θ	
0	a_5	200	3	4	3	2	1	0	0	100	
0	a_6	100	2	1	3	[5]	0	1	0	20	S_0
0	a_7	250	4	3	2	6	0	0	1	125/3	
$c_j - z_j$		—	5	5	6	7	0	0	0	—	
0	a_5	160	11/5	[18/5]	9/5	0	1	—2/5	0	400/9	
7	a_4	20	2/5	1/5	3/5	1	0	1/5	0	100	S_1
0	a_7	130	8/5	9/5	—8/5	0	0	—6/5	1	650/9	
$c_j - z_j$		—	11/5	18/5	9/5	0	0	—7/5	—	—	
5	a_2	400/9	11/18	1	1/2	0	5/18	—1/9	0	800/11	
7	a_4	100/9	[5/18]	0	1/2	1	—1/18	2/9	0	40	S_2
0	a_7	50	1/2	0	—5/2	0	—1/2	—1	1	100	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	—1	—1	0	—	
5	a_2	20	0	1	— 3/5	—11/5	2/5	—3/5	0	—	
5	a_1	40	1	0	[9/5]	18/5	—1/5	4/5	0	200/9	S_3
0	a_7	30	0	0	—17/5	—9/5	—2/5	—7/5	0	—	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	—1	—1	0	—	
5	a_2	100/3	1/3	1	0	—1	1/3	—1/3	0		
6	a_3	200/9	5/9	0	1	2	—1/9	4/9	0		S_4
0	a_7	950/9	17/9	0	0	5	—7/9	1/9	1		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	—1	—1	0		

unde avem:

$$\lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0,$$

$$\lambda + \mu + \nu = 1.$$

În măsura în care o astfel de soluție are toate componentele întregi, ea va constitui și un program optim pentru modelul M. Substituind în soluțiile (S) valoarea lui λ,

$$\lambda = 1 - \mu - \nu,$$

Scanned with OKEN Scanner

ele capătă următoarea formă:

$$(S')\begin{cases} x_1 = 40 - 40\ \mu - 40\ \nu, \\ x_2 = 20 + \frac{40}{3}\mu + \frac{220}{9}\nu, \\ x_3 = \frac{200}{9}\mu, \\ x_4 = \frac{100}{9}\nu, \\ x_5 = x_6 = 0, \\ x_7 = 30 + 680/9\ \mu + 20\ \nu, \end{cases}$$

cu condițiile:

$$\mu \geqslant 0;\ \nu \geqslant 0,$$
$$\mu + \nu \leqslant 1.$$

În sfîrșit, dacă scoatem valorile lui μ și ν din două dintre egalitățile lui (S'):

$$\mu = \frac{9}{200}x_3,$$
$$\nu = \frac{9}{100}x_5$$

și le introducem în celelalte, precum și în condiția $\mu + \nu \leqslant 1$, obținem sistemul de relații următor:

$$[S'']\begin{cases} x_1 + \frac{9}{5}x_3 + \frac{18}{5}x_4 = 40, \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{11}{5}x_4 = 20, \\ x_7 - \frac{17}{5}x_3 - \frac{9}{5}x_4 = 30, \\ 9\ x_3 + 18\ x_4 \leqslant 200. \end{cases}$$

Ținînd seama și de faptul că variabilele x_1, x_2, x_7, x_3 și x_4 trebuie să ia valori întregi, precum și de faptul că x_7 reprezintă cantitatea de materie primă M_3 rămasă neconsumată după aplicarea planului propus, rezultă că planul de producție optim care conduce la cel mai mic consum de materie primă M_3 trebuie să fie o soluție a următorului model matematic:

$$[\max]\ v = x_7,$$

$$[P]\begin{cases} x_1 + \frac{9}{5}x_3 + \frac{18}{5}x_4 = 40, \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{11}{5}x_4 = 20, \\ x_7 - \frac{17}{5}x_3 - \frac{9}{5}x_4 = 30, \\ 9x_3 + 18x_4 \leqslant 200, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_7,\ x_3,\ x_4 \in N^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea modelului ajutător $P^{(0)}$, obținut din P impunînd numai condiția de nenegativitate variabilelor, este realizată în tabelul I.9 (vectorii corespunzători variabilelor x_1, x_2, x_3, x_4, x_7 au fost notați tot prin a_1, a_2, a_3, a_4 și a_7 deși nu coincid cu cei de la punctul a, pentru a nu strica simetria notațiilor).

Tabelul I.9

c_B	B	d	0 a_1	0 a_2	1 a_7	0 a_8	0 a_3	0 a_4	0	
0	a_1	40	1	0	0	0	9/5	18/5	200/9	
0	a_2	20	0	1	0	0	−3/5	−11/5	—	
1	a_7	30	0	0	1	0	−17/5	−9/5	—	S_5
0	a_8	200	0	0	0	1	[9]	18	200/9	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	17/5	9/5	—	
0	a_1	0	1	0	0	−1/5	0	0		
0	a_2	100/3	0	1	0	1/15	0	−1		
1	a_7	950/9	0	0	1	17/45	0	5		S_6
0	a_3	200/9	0	0	0	1/9	1	2		
$c_j - v_j$		—	0	0	0	−17/45	0	−5	—	

Prin aplicarea algoritmului lui Gomory, considerînd componenta neîntreagă $x_7=950/9$ a acestei soluții, sîntem conduși la rezolvarea unui alt model ajutător, de forma:

$$[P^{(1)}] \begin{cases} P^{(0)}, \\ \frac{17}{45} x_8 \geqslant \frac{5}{9}. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui model este făcută în tabelul I.10, reluînd calculele de la secțiunea S_6 a tabelului I.9, în care s-a introdus restricția suplimentară.

Considerînd componenta neîntreagă $x_8=25/17$ a soluției din acest tabel, sîntem conduși la următorul model:

$$[P^{(2)}] \begin{cases} P^{(1)} \\ \frac{6}{17} x_9 \geqslant \frac{9}{17}, \end{cases}$$

a cărui rezolvare se găsește în tabelul I.11. Folosind componenta neîntreagă $x_7=311/3$ a soluției din acest tabel, construim următorul model:

$$[P^{(3)}] \begin{cases} P^{(2)} \\ \frac{5}{10} x_{10} \geqslant \frac{2}{3}, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.10

C_B	B	d	0 a_1	0 a_2	1 a_7	0 a_8	0 a_3	0 a_4	0 a_9	
0	a_1	0	1	0	0	−1/5	0	0	0	
0	a_2	100/3	0	1	0	4/15	0	−1	0	
1	a_7	950/9	0	0	1	17/45	0	5	0	S_7
0	a_3	200/9	0	0	0	1/9	1	20	0	
0	a_9	−5/9	0	0	0	**|−17/45|**	0	0	1	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	−17/45	0	−5	0	
0	a_1	5/17	1	0	0	0	0	0	−9/17	
0	a_2	565/17	0	1	0	0	0	−1	3/17	
1	a_7	105	0	0	1	0	0	5	1	S_8
0	a_3	375/17	0	0	0	0	1	2	5/17	
0	a_8	25/17	0	0	0	1	0	0	−45/17	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	0	−5	−1	

Tabelul I.11

C_B	B	d	0 a_1	0 a_2	1 a_7	0 a_8	0 a_3	0 a_4	0 a_9	0 a_{10}	
0	a_1	5/17	1	0	0	0	0	0	−9/17	0	
0	a_2	565/17	0	1	0	0	0	−1	3/17	0	
1	a_7	105	0	0	1	0	0	5	1	0	S_9
0	a_3	375/17	0	0	0	0	1	2	5/17	0	
0	a_8	25/17	0	0	0	1	0	0	−45/17	0	
0	a_{10}	−8/17	0	0	0	0	0	0	**|−6/17|**	1	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	0	−5	−1	0	
0	a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	−3/2	
0	a_2	33	0	1	0	0	0	−1	0	1/2	
1	a_7	311/3	0	0	1	0	0	5	0	17/6	S_{10}
0	a_3	65/3	0	0	0	0	1	2	0	5/6	
0	a_8	5	0	0	0	1	0	0	0	−15/2	
0	a_9	4/3	0	0	0	0	0	0	1	−17/6	
$c_j - v_j$		—									

a cărui rezolvare este făcută în tabelul I.12. În sfîrșit, folosind componenta $x_{10} = \frac{4}{5}$ a soluției din acest tabel, construim următorul model:

$$[P^{(4)}] \begin{cases} P^{(3)}, \\ \frac{4}{5} x_{11} \geqslant \frac{4}{5}, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.12

C_B	B	d	0 a_1	0 a_2	1 a_7	0 a_8	0 a_3	0 a_4	0 a_9	0 a_{10}	0 a_{11}	
0	a_1	1	1	0	0	0	0	0	0	−3/2	0	
0	a_2	33	0	1	0	0	0	−1	0	1/2	0	
1	a_7	311/3	0	0	1	0	0	5	0	17/6	0	
0	a_3	65/3	0	0	0	0	1	2	0	5/6	0	S_{11}
0	a_8	5	0	0	0	1	0	0	0	−15/2	0	
0	a_9	4/3	0	0	0	0	0	0	1	−17/6	0	
0	a_{11}	−2/3	0	0	0	0	0	0	0	**−5/6**	1	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	0	−5	1	−17/6	0	
0	a_1	11/5	1	0	0	0	0	0	0	0	9/5	
0	a_2	163/5	0	1	0	0	0	−1	0	0	3/5	
1	a_7	507/5	0	0	1	0	0	5	0	0	17/5	
0	a_3	21	0	0	0	0	1	2	0	0	1	S_{12}
0	a_8	11	0	0	0	1	0	0	0	0	−9	
0	a_9	18/5	0	0	0	0	0	0	1	0	−17/5	
0	a_{10}	4/5	0	0	0	0	0	0	0	1	−6/5	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	0	−5	0	0	−17/5	

a cărui rezolvare este realizată în tabelul I.13. Obţinem aici o soluţie optimă cu toate componentele întregi, care ne furnizează programul optim al modelului P şi anume:

$$x_1 = 4, \qquad x_3 = 20, \qquad x_7 = 98,$$
$$x_2 = 32, \qquad x_4 = 0, \qquad v_{max} = 98.$$

c) Reluînd ideile sistemului de relaţii (S''), va trebui să rezolvăm următorul model de programare liniară în numere întregi:

$$[\min]\ w = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$[R] \begin{cases} x_1 + \frac{9}{5}x_3 + \frac{18}{5}x_4 = 40, \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{11}{5}x_4 = 20, \\ x_7 - \frac{17}{5}x_3 - \frac{9}{5}x_4 = 30, \\ 9x_3 + 18x_4 \leqslant 200, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_7,\ x_3,\ x_4 \in N^*.$$

Modelul ajutător $R^{(0)}$, obţinut impunînd numai condiţii de nenegativitate, e rezolvat în tabelul I.14. Deoarece soluţia optimă a acestui model nu are to

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.13

C_B	B	d	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
			a_1	a_2	a_7	a_8	a_3	a_4	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
0	a_1	11/5	1	0	0	0	0	0	0	0	—9/5	0	
0	a_2	163/5	0	1	0	0	0	—1	0	0	3/5	0	
1	a_7	507/5	0	0	1	0	0	5	0	0	17/5	0	
0	a_3	21	0	0	0	0	1	2	0	0	1	0	S_{13}
0	a_8	11	0	0	0	1	0	0	0	0	—9	0	
0	a_9	18/5	0	0	0	0	0	0	1	0	—17/5	0	
0	a_{10}	4/5	0	0	0	0	0	0	0	1	—6/5	0	
0	a_{12}	—4/5	0	0	0	0	0	0	0	0	|—4/5|	1	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	0	—5	0	0	—17/5	0	
0	a_1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	—9/4	
0	a_2	32	0	1	0	0	0	—1	0	0	0	3/4	
1	a_7	98	0	0	1	0	0	5	0	0	0	17/4	
0	a_3	20	0	0	0	0	1	2	0	0	0	5/4	
0	a_8	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—45/4	S_{14}
0	a_9	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—17/4	
0	a_{10}	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—3/2	
0	a_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—5/4	
$c_j - v_j$		—	0	0	0	0	0	—5	0	0	0	—17/4	

componentele întregi, trecem la rezolvarea altor modele ajutătoare, folosind de fiecare dată componenta marcată printr-un asterisc în secțiunea de optim a rezolvării modelului corespunzător. Aceste modele sînt succesiv următoarele:

$$[R^{(1)}] \begin{cases} R^{(0)}, \\ \frac{8}{9} x_1 \geqslant \frac{5}{9}, \end{cases}$$

rezolvat în tabelul I.15,

$$[R^{(2)}] \begin{cases} R^{(1)}, \\ \frac{1}{2} x_3 + \frac{5}{16} x_{14} \geqslant \frac{15}{16}, \end{cases}$$

rezolvat în tabelul I.16,

$$[R^{(3)}] \begin{cases} R^{(2)}, \\ \frac{5}{8} x_{14} \geqslant \frac{7}{8}, \end{cases}$$

rezolvat în tabelul I.17 și

$$[R^{(4)}] \begin{cases} R^{(3)}, \\ \frac{3}{5} x_{16} \geqslant \frac{3}{5}, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.14

C_B	B	d	1 a_1	1 a_2	0 a_7	0 a_{13}	1 a_3	1 a_4	0	
1	a_1	40	1	0	0	0	9/5	$\overline{\lvert 18/5 \rvert}$	100/9	
1	a_2	20	0	1	0	0	—3/5	—11/5		S_{15}
0	a_7	30	0	0	1	0	—17/5	—9/5		
0	a_{13}	200	0	0	0	1	9	18	100/9	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	1/5	2/5	—	
1	a_4	100/9	5/18	0	0	0	$\overline{\lvert 1/2 \rvert}$	1	200/9	
1	a_2	400/9	11/18	1	0	0	1/2	0	800/9	S_{16}
0	a_7	50	1/2	0	1	0	—5/2	0	—	
0	a_{13}	0	—5	0	0	1	0	0	—	
$c_j - w_j$		—	—1/9	0	0	0	0	0	—	
1	a_3	200/9	5/9	0	0	0	1	2	—	
1	a_2	100/3	1/3	1	0	0	0	—1	—	
0	a_7	950/9*	17/9	0	1	0	0	5	—	S_{17}
0	a_{13}	0	—5	0	0	1	0	0	—	
$c_j - w_j$		—	—1/9	0	0	0	0	0	—	

rezolvat în tabelul I.18. Din acest ultim tabel, se vede că modelul $R^{(4)}$ are două soluții optime de bază cu toate componentele întregi, soluții care reprezintă și programe optime pentru modelul R.

d) Soluția optimă generală a modelului $R^{(4)}$ este o combinație liniară convexă a soluțiilor optime de bază, furnizate de secțiunile S_{26} și S_{27} ale tabelului I.18 și anume: considerînd numai componentele ce ne interesează

$$x_1 = 4\lambda + 4(1-\lambda) = 4,$$
$$x_2 = 32\lambda + 42(1-\lambda) = 42 - 10\lambda,$$
$$x_3 = 20\lambda,$$
$$x_4 = 10(1-\lambda),$$
$$x_7 = 98\lambda + 48(1-\lambda) = 50\lambda + 48,$$
$$w_{\min} = 56,$$

cu $\lambda \in [0;1]$. De aici scoatem că:

$$\lambda = \frac{x_3}{20},$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.15

c_B	B	d	1 a_1	1 a_2	0 a_7	0 a_{13}	1 a_3	1 a_4	0 a_{14}	θ	
1	a_3	200/9	5/9	0	0	0	1	2	0		
1	a_2	100/3	1/3	1	0	0	0	—1	0		
0	a_7	950/9	17/9	0	1	0	0	5	0		
0	a_{13}	0	—5	0	0	1	0	0	0		S_{18}
0	a_{14}	—5/9	|—8/9|	0	0	0	0	0	1		
$c_j - w_j$		—	—1/9	0	0	0	0	0	0	—	
1	a_3	175/8	0	0	0	0	1	[2]	5/8	175/16	
1	a_2	265/8	0	1	0	0	0	—1	3/8	—	
0	a_7	835/8	0	0	1	0	0	5	17/8	167/8	S_{19}
0	a_{13}	25/8	0	0	0	1	0	0	—45/8	—	
1	a_1	5/8	1	0	0	0	0	0	—9/8	—	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	—1/8	—	
1	a_4	175/16*	0	0	0	0	1/2	1	5/16	—	
1	a_2	705/16	0	1	0	0	1/2	0	11/16	—	
0	a_7	795/16	0	0	1	0	—5/2	0	9/16	—	
0	a_{13}	25/8	0	0	0	1	0	0	—45/8	—	S_{20}
1	a_1	5/8	1	0	0	0	0	0	—9/8	—	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	—1/8	—	

Tabelul I.16

c_B	B	d	1 a_1	1 a_2	0 a_7	0 a_{13}	1 a_3	1 a_4	0 a_{14}	0 a_{15}	
1	a_4	175/16	0	0	0	0	1/2	1	5/16	0	
1	a_2	705/16	0	1	0	0	1/2	0	11/16	0	
0	a_7	795/16	0	0	1	0	—5/2	0	9/16	0	
0	a_{13}	25/8	0	0	0	1	0	0	—45/8	0	S_{21}
1	a_1	5/8	1	0	0	0	0	0	—9/8	0	
0	a_{15}	—15/16	0	0	0	0	|—1/2|	0	—5/16	1	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	1/8	0	
1	a_4	10	0	0	0	0	0	1	0	1	
1	a_2	345/8	0	1	0	0	0	0	3/8	1	
0	a_7	435/8	0	0	1	0	0	0	17/8	—5	
0	a_{13}	25/8	0	0	0	1	0	0	—45/8	0	
1	a_1	5/8	1	0	0	0	0	0	—9/8	0	S_{22}
1	a_3	15/8*	0	0	0	0	1	0	5/8	—2	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	—1/8	0	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.17

C_B	B	d	1	1	0	0	1	1	0	0	0	
			a_1	a_2	a_7	a_{13}	a_3	a_4	a_{14}	a_{15}	a_{16}	
1	a_4	10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
1	a_2	345/8	0	1	0	0	0	0	3/8	1	0	
0	a_7	435/8	0	0	1	0	0	0	17/8	—5	0	S_{23}
0	a_{13}	25/8	0	0	0	1	0	0	—45/8	0	0	
1	a_1	5/8	1	0	0	0	0	0	—9/8	0	0	
1	a_3	15/8	0	0	0	0	1	0	5/8	—2	0	
0	a_{16}	—7/8	0	0	0	0	0	0	$\boxed{-5/8}$	0	1	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	—1/8	0	0	
1	a_4	10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
1	a_2	213/5*	0	1	0	0	0	0	0	1	3/5	
0	a_7	257/5	0	0	1	0	0	0	0	—5	17/5	
0	a_{13}	11	0	0	0	1	0	0	0	0	—9	S_{24}
1	a_1	11/5	1	0	0	0	0	0	0	0	—9/5	
1	a_3	1	0	0	0	0	1	0	0	—2	1	
0	a_{14}	7/5	0	0	0	0	0	0	1	0	—8/5	
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	0	0	—11/5	

Tabelul I.18

C_B	B	d	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	θ	
			a_1	a_2	a_7	a_{13}	a_3	a_4	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}		
1	a_4	10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0		
1	a_2	213/5	0	1	0	0	0	0	0	1	3/5	0		
0	a_7	257/5	0	0	1	0	0	0	0	—5	17/5	0		S_{25}
0	a_{13}	11	0	0	0	1	0	0	0	0	—9	0		
1	a_1	11/5	1	0	0	0	0	0	0	0	—9/5	0		
1	a_3	1	0	0	0	0	1	0	0	—2	1	0		
0	a_{14}	7/5	0	0	0	0	0	0	1	0	—8/5	0		
0	a_{17}	—3/5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{-3/5}$	1		
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	0	0	—11/5	0		
1	a_4	10	0	0	0	0	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0		
1	a_2	42	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	10	
0	a_7	48	0	0	1	0	0	0	0	—5	0	17/3	42	
0	a_{13}	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—15		
1	a_1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	—3		
1	a_3	0	0	0	0	0	1	0	0	—2	0	5/3		S_{26}
0	a_{14}	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—8/3		
0	a_{16}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—5/3		
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1/3		
0	a_{15}	10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0		
1	a_2	32	0	1	0	0	0	—1	0	0	0	1		
0	a_7	98	0	0	1	0	0	5	0	0	0	17/3		
0	a_{13}	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—15		
1	a_1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	— 3		
1	a_3	20	0	0	0	0	1	2	0	0	0	5/3		S_{27}
0	a_{14}	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—8/3		
0	a_{16}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—5/3		
$c_j - w_j$		—	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—1/3		

Scanned with OKEN Scanner

valoare pe care o înlocuim în celelalte relații. Sîntem astfel conduși, conform celor cerute de problemă, la rezolvarea următorului model, lăsînd deoparte valoarea constantă $x_1 = 4$:

$$[\min]\ t = |x_3 - x_4|,$$

$$[Q]\quad \begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 42, \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 10, \\ -\frac{5}{2}x_3 + x_7 = 48, \\ x_3 \leqslant 20, \end{cases}$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_7 \geqslant 0.$$

Considerăm aici două cazuri, după cum $x_3 \geqslant x_4$ sau $x_3 \leqslant x_4$, ceea ce înseamnă că rezolvăm două modele de programare liniară în numere întregi și anume:

$$[\min]\ t' = x_3 - x_4,$$

$$[Q_1]\quad \begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 42, \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 10, \\ -\frac{5}{2}x_3 + x_7 = 48, \\ x_3 \leqslant 20, \\ -x_3 + x_4 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_7 \geqslant 0,$$

respectiv

$$[\min]\ t'' = x_4 - x_3,$$

$$[Q_2]\quad \begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 42, \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 10, \\ -\frac{5}{2}x_3 + x_7 = 48, \\ x_3 \leqslant 20, \\ x_3 - x_4 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_7 \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru primul caz, rezolvarea modelului ajutător, în care considerăm numai condiții de nenegativitate pentru variabile, este realizată în tabelul I.19. Adăugînd la restricțiile acestui model o restricție suplimentară de forma:

$$\frac{1}{3}\,x_{19} \geqslant \frac{2}{3},$$

se obține un alt model, care este rezolvat în tabelul I.20.

Tabelul I.19

c_B	B	d	0	M	0	0	0	1	1	θ	
			a_2	a_{17}	a_7	a_{18}	a_{19}	a_3	a_4		
0	a_2	42	1	0	0	0	0	1/2	0	—	
M	a_{17}	10	0	1	0	0	0	1/2	1	10	S_{28}
0	a_7	48	0	0	1	0	0	−5/2	0	—	
0	a_{18}	20	0	0	0	1	0	1	0	—	
0	a_{19}	0	0	0	0	0	1	−1	[1]	0	
$t'_j - c_j$		—	0	0	0	0	0	$\frac{M}{2}-1$	$M+1$	—	
0	a_2	42	1	0	0	0	0	1/2	0	84	
M	a_{17}	10	0	1	0	0	−1	[3/2]	0	20/3	S_{29}
0	a_7	48	0	0	1	0	0	−5/2	0	—	
0	a_{18}	20	0	0	0	1	0	1	0	20	
−1	a_4	0	0	0	0	0	1	−1	1	—	
$t'_j - c_j$		—	0	0	0	0	$-M-1$	$\frac{3}{2}M+1$	0	—	
0	a_2	116/3	1	−1/3	0	0	0	0	0		
1	a_3	20/3	0	2/3	0	0	−2/3	1	0		
0	a_7	194/3	0	5/3	1	0	−5/3	0	0		S_{30}
0	a_{18}	40/3	0	−2/3	0	1	2/3	0	0		
−1	a_4	20/3	0	2/3	0	0	1/3	0	1		
$t'_j - c_j$		—	0	—	0	0	−1	0	0	—	

(variabila x_{17} a fost neglijată, fiind artificială). Soluția optimă din acest tabel ne furnizează un program optim pentru modelul Q_1 și anume:

$$x_1 = 4, \qquad x_3 = 8, \qquad x_7 = 68,$$
$$x_2 = 38, \qquad x_4 = 6, \qquad t'_{\min} = 2.$$

Pentru cel de-al doilea caz, rezolvarea modelului ajutător, în care impunem numai condiții de nenegativitate pentru variabile, este realizată în tabelul I.21.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.20

C_B	B	d	0	0	0	0	1	−1	0	
			a_2	a_7	a_{18}	a_{19}	a_3	a_4	a_{29}	
0	a_2	116/3	1	0	0	0	0	0	0	
1	a_3	20/3	0	0	0	−2/3	1	0	0	
0	a_7	194/3	0	1	0	−5/3	0	0	0	
0	a_{18}	40/3	0	0	1	2/3	0	0	0	S_{31}
−1	a_4	20/3	0	0	0	1/3	0	1	0	
0	a_{20}	−2/3	0	0	0	**| −1/3 |**	0	0	1	
	$t'_j - c_j$	—	0	0	0	−1	0	0	0	
0	a_2	38	1	0	0	0	0	0	1	
1	a_3	8	0	0	0	0	1	0	−2	
0	a_7	68	0	1	0	0	0	0	−5	
0	a_{18}	12	0	0	1	0	0	0	2	S_{32}
−1	a_4	6	0	0	0	0	0	1	1	
0	a_{19}	2	0	0	0	1	0	0	−3	
	$t'_j - c_j$	—	0	0	0	0	0	0	−3	

Tabelul I.21

C_B	B	d	0	M	0	0	0	−1	1		
			a_2	a_{21}	a_7	a_{22}	a_{23}	a_3	a_4		
0	a_2	42	1	0	0	0	0	1/2	0	—	
M	a_{21}	10	0	1	0	0	0	1/2	1	10	
0	a_7	48	0	0	1	0	0	−5/2	0	—	S_{33}
0	a_{22}	20	0	0	0	1	0	1	0	—	
0	a_{23}	0	0	0	0	0	1	1	**| −1 |**	0	
	$t''_j - c_j$	—	0	0	0	0	0	$\frac{M}{2}+1$	$M-1$		
0	a_2	42	1	0	0	0	0	1/2	0	84	
1	a_4	10	0	1	0	0	0	1/2	1	20	
0	a_7	48	0	0	1	0	0	−5/2	0	—	S_{34}
0	a_{22}	20	0	0	0	1	0	1	0	20	
1	a_{23}	10	0	0	0	0	1	**| 3/2 |**	0	20/3	
	$t''_j - c_j$	—	0	—	0	0	0	1	—	—	
0	a_2	116/3	1		0	0	−1/3	0	0		
1	a_4	20/3	0		0	0	−1/3	0	1		
0	a_7	194/3	0		1	0	5/3	0	0		S_{35}
0	a_{22}	40/3	0		0	1	−2/3	0	0		
−1	a_3	20/3	0		0	0	2/3	1	0		
	$t''_j - c_j$	—	0	×	0	0	−1	0	0	—	

Scanned with OKEN Scanner

Adăugînd la sistemul de restricţii al acestui model o restricţie suplimentară de forma:

$$\frac{2}{3}x_{23} \geqslant \frac{2}{3},$$

se obţine un alt model care este rezolvat în tabelul I.22.

Tabelul I.22

c_B	B	d	0	0	0	0	−1	1	1	
			a_2	a_7	a_{22}	a_{23}	a_3	a_4	a_{24}	
0	a_2	116/3	1	0	0	−1/3	0	0	0	
1	a_4	20/3	0	0	0	−1/3	0	1	0	
0	a_7	194/3	0	1	0	5/3	0	0	0	S_{36}
0	a_{22}	40/3	0	0	1	−2/3	0	0	0	
−1	a_3	20/3	0	0	0	2/3	1	0	0	
0	a_{24}	−2/3	0	0	0	**−2/3**	0	0	1	
	$t''_j - c_j$	—	0	0	0	−1	0	0	0	
0	a_2	39	1	0	0	0	0	0	−1/2	
1	a_4	7	0	0	0	0	0	1	−1/2	
0	a_7	63	0	1	0	0	0	0	5/2	S_{37}
0	a_{22}	14	0	0	1	0	0	0	−1	
−1	a_3	6	0	0	0	0	1	0	1	
0	a_{23}	2	0	0	0	1	0	0	−3/2	
	$t''_j - c_j$	—	0	0	0	0	0	0	−3/2	

Soluţia optimă din acest tabel conduce la următorul program optim al modelului Q_2:

$$x_1 = 4, \qquad x_3 = 6, \qquad x_7 = 63,$$

$$x_2 = 39, \qquad x_4 = 7, \qquad t''_{\min} = 1.$$

Comparînd programele optime obţinute pentru modelele Q_1 şi Q_2, reţinem ca soluţie a problemei ultimul program care dă o valoare minimă mai mică a funcţiei de eficienţă.

Observaţie. Rezultatele cerute de problemă se pot găsi direct, dacă s-ar calcula toate soluţiile optime ale modelului M. În tabelul I.23 sînt scrise toate aceste soluţii, obţinute din soluţia generală a modelului ajutător M, pentru diferite valori date coeficienţilor λ, μ şi ν, astfel alese încît toate componentele soluţiei să fie numere întregi.

Scanned with OKEN Scanner

Ultima coloană din tabel conține cantitățile totale de produse ce se fabrică de fiecare dată, fiind marcate cu steluțe cantitățile minime de acest fel.

Tabelul I.23

λ	μ	ν	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	$x_1+x_2+x_3+x_4$
1/10	9/20	9/20	4	37	10	5	73	56*
11/20	9/100	9/25	22	30	2	4	44	58
11/20	9/25	9/100	22	27	8	1	59	58
13/40	9/40	9/20	13	34	5	5	56	57
1	0	0	40	20	0	0	30	60
1/10	0	9/10	4	42	0	10	48	56*
11/20	0	9/20	22	31	0	5	39	58
1/10	9/10	0	4	32	20	0	98	56*
11/20	9/20	0	22	26	10	0	64	58
31/40	9/40	0	31	23	5	0	47	59
1/10	18/25	9/50	4	34	16	2	88	56*
1/10	9/50	18/25	4	40	4	8	58	56*
1/10	9/25	27/50	4	38	8	6	68	56*
11/20	9/50	27/100	22	29	4	3	49	58
1/10	27/50	9/25	4	36	12	4	78	56*
11/20	27/100	9/50	22	28	6	2	54	58
31/40	27/200	9/100	31	24	3	1	42	59
13/40	27/200	27/50	13	35	3	6	51	57
13/40	9/200	63/100	13	36	1	7	46	57
13/40	63/200	9/25	13	33	7	4	61	57
1/10	27/100	63/100	4	39	6	7	63	56*
1/10	63/100	27/100	4	35	14	3	83	56*
13/14	27/40	0	13	29	15	0	81	57

Problema 3. În atelierul de prelucrări mecanice al unei întreprinderi, este necesară fabricarea unor țevi pentru dotarea unei secții a întreprinderii, țevi ce vor fi folosite la instalarea unor bancuri de lucru. Atelierul dispune de niște țevi, cu lungimea de 5 m, din care trebuie tăiate cel puțin 35 de țevi cu lungimea de 2 m, 25 de țevi cu lungimea de 2,5 m și 10 țevi cu lungimea de 3 m.

a) Cum trebuie procedat pentru ca numărul țevilor cu lungimea de 5 m, folosite pentru obținerea țevilor necesare, să fie cît mai mic, astfel încît lucrătorii atelierului de prelucrări mecanice să lucreze cu pierderi de material minime.

b) Dar dacă se cere ca numărul de bucăți cerut de fiecare lungime să nu fie depășit, urmînd a obține exact 35 țevi de cîte 2 m, 25 țevi de cîte 2,5 m și 10 țevi de cîte 3 m?

Rezolvare. a) Există mai multe posibilități de a obține dintr-o țeavă de 5 m țevi cu lungimile $L=2$m, 2,5 m și 3 m. Aceste posibilități sînt reliefate în tabelul I.24.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.24

Varianta / Lung. țevi	1	2	3	4
Buc. țevi $L=2$m	2	0	1	1
Buc. țevi $L=2{,}5$m	0	2	0	1
Buc. țevi $L=3$ m	0	0	1	0
Deșeu	1	0	0	0,5

Notînd cu x_i numărul de țevi cu lungimea de 5 m, care sînt tăiate după varianta i, $i=1,2,3,4$, vom avea de rezolvat următorul model matematic:

$$[\min]\, z = x_1 + 1/2\, x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 35, \\ x_2 + x_4 \geqslant 25, \\ x_3 \geqslant 10. \end{cases}$$

$$x_j \in N^*,\ j = 1,2,3,4.$$

Rezolvăm mai întîi modelul obținut prin înlocuirea condițiilor de integritate prin condiții de nenegativitate, în care, după introducerea variabilelor de compensare, împărțim primele două ecuații prin doi. În acest fel, sistemul de restricții devine:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_5 = \frac{35}{2}, \\ x_2 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_6 = \frac{25}{2}, \\ x_3 - x_7 = 10. \end{cases}$$

În tabelul I.25 este rezolvat acest model ajutător, folosind vectorul artificial x_8.

Deoarece soluția optimă obținută nu convine modelului inițial, pentru aplicarea algoritmului lui Gomory, considerăm componenta neîntreagă a ei, $x_2=25/2$, extragem din tabelul de optim restricția ce îi corespunde:

$$x_2 + 1/2\, x_4 - 1/2\, x_6 = 25/2$$

și din ea deducem restricția suplimentară ce urmează:

$$1/2\, x_4 + 1/2\, x_6 \geqslant 1/2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.25

C_B	B	d	1	0	0	1/2	0	0	0	M	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
1	a_1	35/2	1	0	1/2	1/2	−1/2	0	0	0	35
0	a_2	25/2	0	1	0	1/2	0	−1/2	0	0	—
M	a_8	10	0	0	[1]	0	0	0	−1	1	10
z_j-c_j		—	0	0	$M+1/2$	0	−1/2	0	$-M$	0	—
1	a_1	25/2	1	0	0	1/2	−1/2	0	[1/2]	X	25
0	a_2	25/2	0	1	0	1/2	0	−1/2	0		
0	a_3	10	0	0	1	0	0	0	−1		
z_j-c_j		—	0	0	0	0	−1/2	0	1/2	×	—
0	a_7	25	2	0	0	1	−1	0	1	X	—
0	a_2	25/2	0	1	0	1/2	0	1/2	0		
0	a_3	35	2	0	1	1	−1	0	0		
z_j-c_j		—	−1	0	0	−1/2	0	0	0	×	—

Schimbînd semnele în această restricție și adăugîndu-i apoi o variabilă de compensare, ea se poate atașa la tabelul de optim ca în tabelul I.26. Aici este aplicat în continuare algoritmul simplex-dual.

Talelul I.26

C_B	B	d	1	0	0	1/2	0	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_{11}
0	a_7	25	2	0	0	1	−1	0	1	0
0	a_2	25/2	0	1	0	1/2	0	−1/2	0	0
0	a_3	35	2	0	1	1	−1	0	0	0
0	a_{11}	1/2	0	0	0	−1/2	0	[−1/2]	0	1
z_j-c_j		—	−1	0	0	−1/2	0	0	0	0
0	a_7	25	2	0	0	1	−1	0	1	0
0	a_2	13	0	1	0	1	0	0	0	−1
0	a_3	35	2	0	1	1	−1	0	0	0
0	a_6	1	0	0	0	1	0	1	0	−2
z_j-c_j		—	−1	0	0	−1/2	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Soluția optimă obținută de această dată are toate componentele întregi, deci este soluție optimă și pentru modelul inițial. Din această soluție, considerăm evident numai următoarele valori:

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = 35,$$
$$x_2 = 13, \qquad z_{\min} = 0.$$

Rezultă că vor trebui tăiate 13 țevi după varianta 2 și 35 de țevi după varianta 3, ceea ce face ca deșeul rezultat să fie egal cu zero.

b) În cazul în care se cere ca numărul de țevi, respectiv de 2 m, 2,5 m și 3 m, să nu fie depășit, modelul matematic este altul și anume:

$$[\min]\ z = x_1 + \frac{1}{2}\,x_4,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 35, \\ 2x_2 + x_4 = 25, \\ x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \in N^*, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Împărțind și aici primele două ecuații cu 2, sistemul de restricții devine:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_4 = \frac{35}{2}, \\ x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 = \frac{25}{2}, \\ x_3 = 10. \end{cases}$$

Modelul obținut prin înlocuirea condițiilor de integritate cu cele de nenegativitate este rezolvat în tabelul I.27, din care rezultă că există două soluții de bază optime, dintre care cea de a doua are toate componentele întregi. Aceasta din urmă convine problemei, urmînd să se taie $x_3=10$ țevi prin varianta 3 și 25 țevi prin varianta 4. Rezultă o pierdere de material de

$$z_{\min} = \frac{25}{2} \text{ metri.}$$

Problema 4. La prelucrarea a trei tipuri de piese (indivizibile) P_1, P_2 și P_3 participă trei mașini, notate cu M_1, M_2 și M_3, astfel încît la prelucrarea ei, fiecare piesă trebuie să treacă pe la fiecare mașină. Timpurile de prelucrare a unei piese de fiecare tip la fiecare mașină în parte, disponibilul de timp al celor trei mașini și cîștigul net obținut prin producerea și vinderea unei piese de fiecare tip în parte sînt date în tabelul I.28.

Să se determine cîte piese P_1, P_2, P_3 trebuie produse, astfel încît prelucrarea lor să nu ceară un timp mai mare decît cel disponibil al mașinilor, iar cîștigul total realizat să fie maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.27

C_B	B	d	1	0	0	1/2	M	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	a_1	35/2	1	0	1/2	1/2	0	35
0	a_2	25/2	0	1	0	1/2	0	—
M	a_5	10	0	0	[1]	0	1	10
$z_j - c_j$		—	0	0	$M+\frac{1}{2}$	0	0	—
1	a_1	25/2	1	0	0	[1/2]		
0	a_2	25/2	0	1	0	1/2	X	
0	a_3	10	0	0	1	0		
$z_j - c_j$			0	0	0	0	×	
1/2	a_4	25	2	0	0	1		
0	a_2	0	−1	1	0	0	X	
0	a_3	10	0	0	1	0		
$z_j - c_j$		—	0	0	0	0	×	

Tabelul I.28

Mașină \ Tip piesă	P_1	P_2	P_3	Timp disponibil
M_1	3	2	5	200
M_2	4	5	2	310
M_3	1	3	3	140
Cîștig	4	6	7	—

Rezolvare. Dacă notăm cu x_1, x_2, x_3 numărul de piese produse din cele trei tipuri, modelul matematic al problemei este următorul:

$$[\max]\, z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3,$$

$$(M) \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 200, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leqslant 310, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 140, \end{cases}$$

$$x_j \in N^*, \quad j = 1, 2, 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Modelul ajutător, obținut din M prin înlocuirea condițiilor ca variabilele să fie întregi cu condiții de nenegativitate, model pe care îl notăm cu $M^{(0)}$, este rezolvat în tabelul I.29. Considerînd componenta neîntreagă

$$x_1 = 275/7 = 39\frac{2}{7}$$

a soluției optime găsite, pentru aplicarea metodei de tip Branch and Bound, construim alte două modele ajutătoare, obținute din modelul $M^{(0)}$ prin adăugarea la sistemul de restricții a unei restricții suplimentare de forma:

$$x_1 \leqslant 39, \text{ respectiv: } x_1 \geqslant 40.$$

Notăm aceste modele cu $M^{(1)}$ și $M^{(2)}$. Rezolvarea modelului $M^{(1)}$ este realizată în tabelul I.30, reluîndu-se calculul de la secțiunea S_2 a tabelului I.29 la care s-a atașat o linie corespunzătoare restricției nou adăugate (această secțiune era ultima în care vectorul a_1 nu aparține bazei). Pentru rezolvarea modelului $M^{(2)}$ folosim substituția:

$$y_1 = x_1 - 40, \text{ sau } x_1 = y_1 + 40.$$

Tabelul I.29

C_B	B	d	4 a_1	6 a_2	7 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0	
0	a_4	200	3	2	[5]	1	0	0	40	
0	a_5	310	4	5	2	0	1	0	152	S_0
0	a_6	140	1	3	3	0	0	1	140/3	
$c_j - z_j$		—	4	6	7	0	0	0		
7	a_3	40	3/5	2/5	1	1/5	0	0	100	
0	a_5	230	14/5	21/5	0	—2/5	1	0	1150/21	S_1
0	a_6	20	—4/5	[9/5]	0	—3/5	0	1	100/9	
$c_j - z_j$		—	—1/5	16/5	0	—7/5	0	0	—	
7	a_3	320/9	7/9	0	1	1/3	0	—2/9	320/7	
0	a_5	550/3	[14/3]	0	0	1	1	—7/3	275/7	S_2
6	a_2	100/9	—4/9	1	0	—1/3	0	5/9	—	
$c_j - z_j$		—	11/9	0	0	—1/3	0	—16/9	—	
7	a_3	5	0	0	1	1/6	—1/6	1/6		
4	a_1	275/7	1	0	0	3/14	3/14	—1/2		S_3
6	a_2	200/7	0	1	0	—5/21	2/21	1/3		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	—25/42	—11/42	—7/6		

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.30

C_B	B	d	4	6	7	0	0	0	0	θ	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
7	a_3	320/9	7/9	0	1	1/3	0	—2/9	0	320/7	
0	a_5	550/3	14/3	0	0	1	1	—7/3	0	275/7	
6	a_2	100/9	—4/9	1	0	—1/3	0	5/9	0	—	S_4
0	a_7	39	[1]	0	0	0	0	0	1	39	
$c_j - z_j$		—	11/9	0	0	—1/3	0	—16/9	0	—	
7	a_3	47/9	0	0	1	1/3	0	—2/9	7/9		
0	a_5	4/3	0	0	0	1	1	—7/3	—14/3		
6	a_2	256/9	0	1	0	[—1/3]	0	5/9	4/9		S_5
4	a_1	39	1	0	0	0	0	0	1		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	—1/3	0	—16/9	—11/9		

În acest mod, modelul $M^{(2)}$ capătă forma următoare:

$$[\max]\ z = 4y_1 + 6x_2 + 7x_3 + 160,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 80, \\ 4y_1 + 5x_2 + 2x_3 \leqslant 150, \\ y_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 100, \end{cases}$$

$$y_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

Deoarece acest model repetă modelul $M^{(0)}$, cu vectorul termenilor liberi modificat, vom relua calculele de la secțiunea S_3 a tabelului I.30, în care recalculăm coloana d astfel:

$$\tilde{X}_B = B^{-1} \cdot \tilde{d} = \begin{Vmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 3/14 & 3/14 & -1/2 \\ -5/21 & 2/21 & 1/3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 80 \\ 150 \\ 100 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ -5/7 \\ 600/21 \end{Vmatrix}.$$

A apărut o componentă negativă a soluției, deci calculele continuă cu aplicarea algoritmului simplex-dual, ca în tabelul I.31.

Arborele care a luat naștere prin construirea și rezolvarea celor două noi modele ajutătoare este reprezentat în figura I.2, din care rezultă că trebuie să continuăm procesul cu modelul $M^{(1)}$, acesta avînd o valoare optimă a funcției de eficiență mai mare. Fixîndu-ne atenția asupra componentei neîntregi:

$$x_2 = 256/9 = 28\frac{4}{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.31

C_B	B	d	4	6	7	0	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
7	a_3	5	0	0	1	1/6	—1/6	1/6	
4	a_1	—5/7	1	0	0	3/14	3/14	—1/2	S_6
6	a_2	600/21	0	1	0	—5/21	2/21	1/3	
$c_j - z_j$		—				—25/42	—11/42	—7/6	
7	a_3	100/21	1/3	0	1	5/21	—2/21	0	
0	a_6	10/7	—2	0	0	—3/7	—3/7	1	S_7
6	a_2	590/21	2/3	1	0	—2/21	5/21	0	
$c_j - z_j$		—	—7/3	0	0	—23/21	—16/21	0	

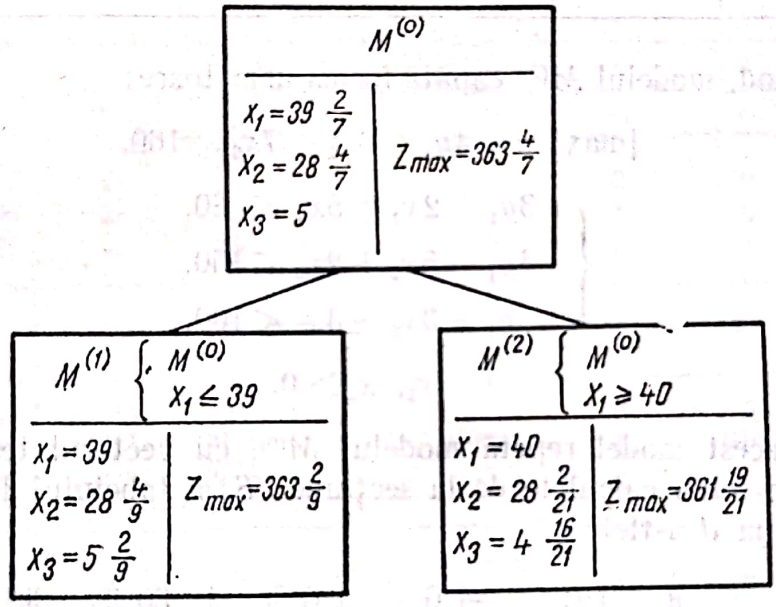


Fig. I.2

a soluției optime a acestui model, construim modelele ajutătoare $M^{(3)}$ și $M^{(4)}$, adăugînd la restricțiile lui $M^{(1)}$ o restricție suplimentară de forma:

$$x_2 \leqslant 28, \text{ respectiv } x_2 \geqslant 29.$$

Rezolvarea modelului $M^{(3)}$ este realizată în tabelul I.32, pornind de la secțiunea S_1 a tabelului I.30 la care se adaugă ambele restricții suplimentare:

$$x_1 \leqslant 39, \qquad x_2 \leqslant 28.$$

Pentru rezolvarea modelului $M^{(4)}$, facem substituția

$$y_2 = x_2 - 29, \text{ sau } x_2 = y_2 + 29$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.32

C_B	B	d	4	6	7	0	0	0	0	0	θ	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8		
7	a_3	40	3/5	2/5	1	1/5	0	0	0	0	100	
0	a_5	230	14/5	21/5	0	—2/5	1	0	0	0	1150/21	
0	a_6	20	—4/5	[9/5]	0	—3/5	0	1	0	0	100/9	S_8
0	a_7	39	1	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_8	28	0	1	0	0	0	0	0	1	28	
$c_j - z_j$		—	—1/5	16/5	0	—7/5	0	0	0	0	—	
7	a_3	320/9	7/9	0	1	1/3	0	—2/9	0	0	320/7	
0	a_5	550/3	14/3	0	0	1	1	—7/3	0	0	275/7	
6	a_2	100/9	—4/9	1	0	—1/3	0	5/9	0	0	—	S_9
0	a_7	39	1	0	0	0	0	0	1	0	39	
0	a_8	152/9	[4/9]	0	0	1/3	0	—5/9	0	1	38*	
$c_j - z_j$		—	11/9	0	0	—1/3	0	—16/9	0	0	—	
7	a_3	6	0	0	1	—1/4	0	3/4	0	—7/4		
0	a_5	6	0	0	0	—5/2	1	7/2	0	—21/2		
6	a_2	28	0	1	0	0	0	0	0	1		S_{10}
0	a_7	1	0	0	0	—3/4	0	5/4	1	—9/4		
4	a_1	38	1	0	0	—3/4	0	—5/4	0	9/4		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	—5/4	0	—1/4	0	—11/4		

în modelul $M^{(1)}$, astfel încît acesta capătă forma următoare:

$$[\max]\ z = 4x_1 + 6y_2 + 7x_3 + 174,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2y_2 + 5x_3 \leqslant 142, \\ 4x_1 + 5y_2 + 2x_3 \leqslant 165, \\ x_1 + 3y_2 + 3x_3 \leqslant 53, \\ x_1 \leqslant 39, \end{cases}$$

$$x_1,\ y_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

Rezolvarea efectivă este realizată în tabelul I.33. Sîntem deci în fața unui arbore ca cel din figura I.3, din care se vede că trebuie să continuăm algoritmul prin considerarea modelului $M^{(4)}$ folosind componenta neîntreagă:

$$x_1 = \frac{389}{10} = 38{,}9$$

a soluției optime a modelului $M^{(4)}$. Vom construi alte două modele ajutătoare, $M^{(5)}$ și $M^{(6)}$, deduse din $M^{(4)}$ prin adăugarea restricției suplimentare:

$$x_1 \leqslant 38, \text{ respectiv, } x_1 \geqslant 39.$$

Scanned with OKEN Scanner

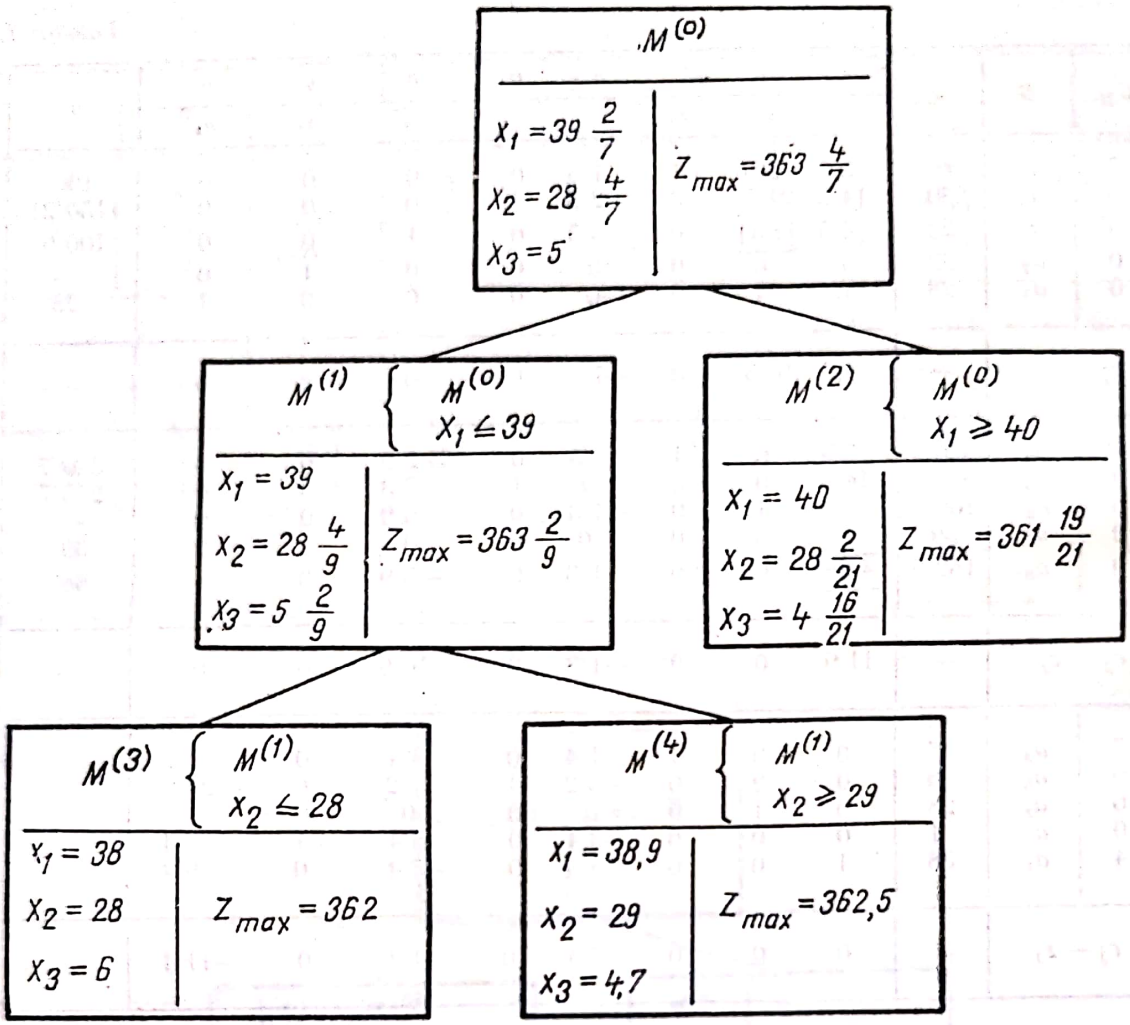


Fig. I.3

Rezolvarea modelului $M^{(5)}$ se poate face observînd că restricţiile:

$$x_1 \leqslant 39, \quad x_1 \leqslant 38$$

se pot înlocui cu una sigură şi anume:

$$x_1 \leqslant 38.$$

Astfel, modelul $M^{(5)}$ repetă modelul $M^{(4)}$, cu o simplă modificare la vectorul termenilor liberi. În acest fel, vom relua calculele de la secţiunea S_{13} a tabelului I.40, în care vom înlocui coloana d prin vectorul calculat astfel:

$$\tilde{X}_B = B^{-1} \cdot \tilde{d} = \begin{Vmatrix} 1 & -2/5 & -7/5 & 0 \\ 0 & 3/10 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1/10 & 2/5 & 0 \\ 0 & -3/10 & 1/5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 142 \\ 165 \\ 53 \\ 38 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 9/5 \\ 389/10 \\ 47/10 \\ -9/10 \end{Vmatrix}.$$

Calculele sînt continuate în tabelul I.34.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.33

C_B	B	d	4 a_1	6 a_2	7 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	0	
0	a_4	142	3	2	5	1	0	0	0	142/5	
0	a_5	165	4	5	2	0	1	0	0	165/2	
0	a_6	53	1	3	[3]	0	0	1	0	53/3	S_{11}
0	a_7	39	1	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	4	6	7	0	0	0	0		
0	a_4	161/3	4/3	−3	0	1	0	−5/3	0	161/4	
0	a_5	389/3	[10/3]	3	0	0	1	−2/3	0	389/10	
7	a_3	53/3	1/3	1	1	0	0	1/3	0	53	S_{12}
0	a_7	39	1	0	0	0	0	0	1	39	
$c_j - z_j$		—	5/3	−1	0	0	0	−7/3	0	—	
0	a_4	9/5	0	−21/5	0	1	−2/5	−7/5	0		
4	a_1	389/10	1	9/10	0	0	3/10	−1/5	0		
7	a_3	47/10	0	7/10	1	0	−1/10	2/5	0		S_{13}
0	a_7	1/10	0	−9/10	0	0	−3/10	1/5	1		
$c_j - z_j$		—	0	−5/2	0	0	−1/2	−2	0	—	

Tabelul I.34

C_B	B	d	4 a_1	6 a_2	7 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	
0	a_4	9/5	0	−21/5	0	1	−2/5	−7/5	0	
4	a_1	389/10	1	9/10	0	0	3/10	−1/5	0	
7	a_3	47/10	0	7/10	1	0	−1/10	2/5	0	S_{14}
0	a_7	−9/10	0	−9/10	0	0	−3/10	1/5	1	
$c_j - z_j$		—	0	−5/2	0	0	−1/2	−2	0	
0	a_4	3	0	−3	0	1	0	−5/3	−4/3	
4	a_1	38	1	0	0	0	0	0	1	
7	a_3	5	0	1	1	0	0	1/3	−1/3	S_{15}
0	a_5	3	0	3	0	0	1	−2/3	−10/3	
$c_j - z_j$		—	0	−1	0	0	0	−7/3	−5/3	

Scanned with OKEN Scanner

La modelul $M^{(6)}$, din restricțiile:

$$x_1 \leqslant 39 \text{ și } x_1 \geqslant 39$$

rezultă că $x_1=39$. Făcînd această înlocuire, modelul capătă următoarea formă:

$$[\max]\, z = 6x_2 + 7x_3 + 156,$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 \leqslant 83, \\ 5x_2 + 2x_3 \leqslant 154, \\ 3x_2 + 3x_3 \leqslant 101, \\ x_2 \qquad\quad \geqslant 29, \end{cases}$$

$$x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

O rezolvare geometrică a acestui model va conduce direct la următoarea soluție optimă:

$$x_2 = 29, \qquad x_3 = 9/2, \qquad z_{\max} = 361{,}5.$$

Arborele care a luat naștere prin considerarea modelelor ajutătoare de pînă acum are forma din figura I.4, din care se vede că cea mai mare valoare a funcției de eficiență pentru modelele ce se găsesc în extremitățile arborelui este

$$z_{\max} = 362$$

și ea se realizează la modelul $M^{(3)}$. Deoarece soluția optimă corespunzătoare are toate componentele întregi, algoritmul ia sfîrșit, această soluție reprezentînd și programul optim al modelului M.

Problema 5. Pentru fabricarea a trei tipuri de produse, P_1, P_2 și P_3, se folosesc — pe lîngă alte materii prime — două resurse, R_1 și R_2, ale căror rezerve sînt limitate. Consumurile specifice ale celor trei tipuri de produse în fiecare dintre cele două resurse, cantitățile disponibile din aceste resurse, precum și cîștigurile nete realizate prin producerea și vinderea unei unități de produs din fiecare tip sînt date în tabelul I.35. Să se determine un plan de producție care în condițiile date să aducă un cîștig net total maxim, dacă:

a) produsele P_1 și P_2 sînt indivizibile, iar P_3 este divizibil;
b) toate produsele sînt indivizibile.

Tabelul I.35

Tip piesă / Resursă	P_1	P_2	P_3	Disp.
M_1	3	2	4	120
M_2	2	5	3	150
Cîștig	4	4	5	—

Scanned with OKEN Scanner

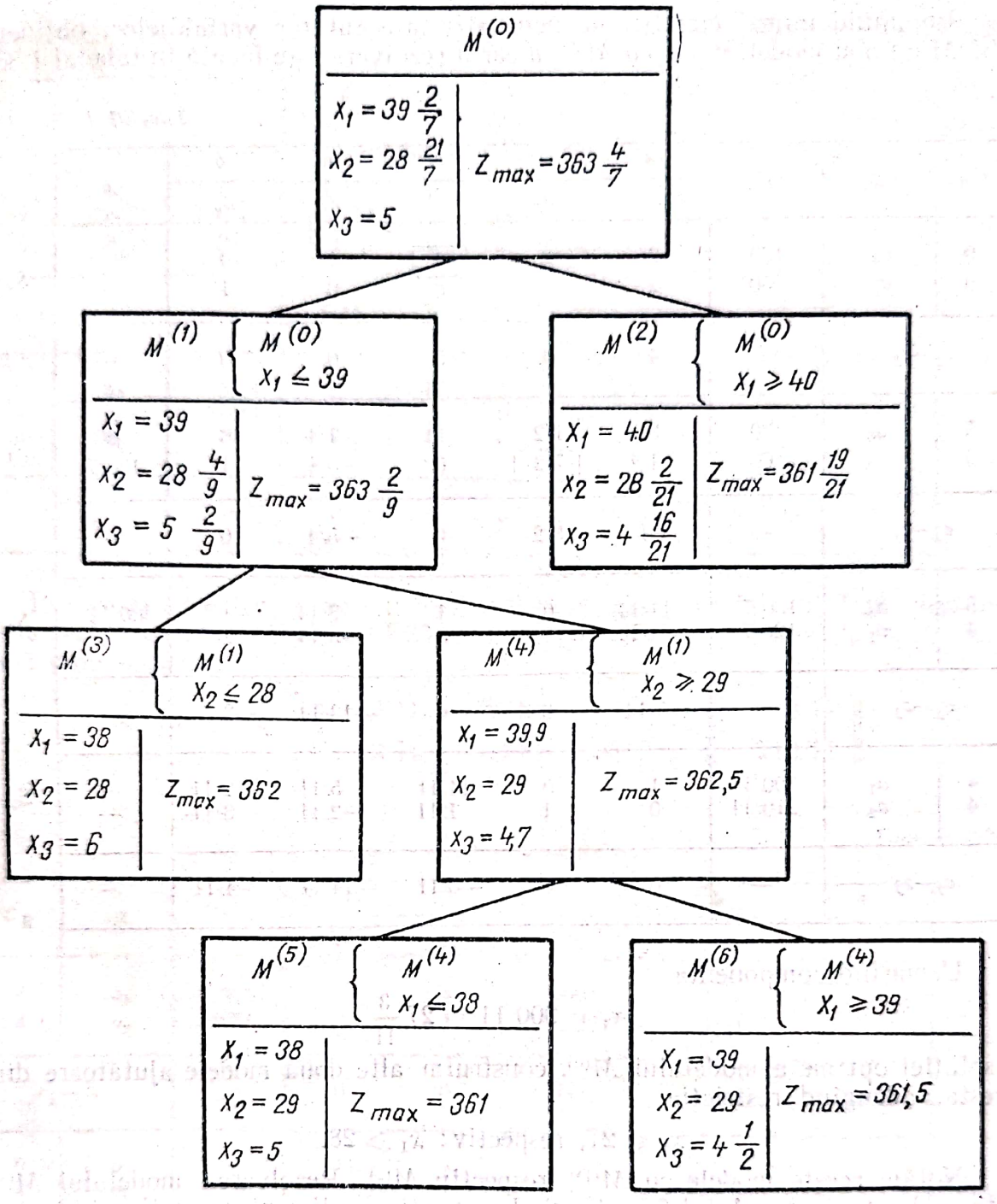


Fig. I.4

Rezolvare. a) Notînd cu x_1, x_2 și x_3 cantitățile fabricate din produsele P_1, P_2 și P_3 respectiv, modelul matematic al problemei este următorul:

$$[\max]\, z = 4x_1 + 4x_2 + 5x_3,$$

$$(M)\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 120, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 150, \\ x_1,\ x_2 \in N^*, \\ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Impunînd numai condiţii de nenegativitate tuturor variabilelor, obţinem din M un nou model, notat cu $M^{(0)}$, a cărui rezolvare este făcută în tabelul I.36.

Tabelul I.36

c_B	B	d	4 a_1	4 a_2	5 a_3	0 a_4	0 a_5	θ	
0	a_4	120	3	2	[4]	1	0	30	S_0
0	a_5	150	2	5	3	0	1	50	
c_j-z_j		—	4	4	5	0	0	—	
5	a_3	30	3/4	1/2	1	1/4	0	60	S_1
0	a_5	60	−1/4	[7/2]	0	−3/4	1	120/7	
c_j-z_j		—	1/4	3/2	0	−5/4	0	—	
5	a_3	150/7	11/14	0	1	5/14	−1/7	300/11	S_2
4	a_2	120/7	−1/14	1	0	−3/14	2/7		
c_j-z_j		—	5/14	0	0	−13/14	−3/7	—	
4	a_1	300/11	1	0	14/11	5/11	−2/11	—	S_3
4	a_2	210/11	0	1	1/11	−2/11	3/11	—	
c_j-z_j		—	0	0	−5/11	−14/11	−4/11	—	

Urmărind componenta

$$x_1 = 300/11 = 27\frac{3}{11}$$

a soluţiei optime a modelului $M^{(0)}$, construim alte două modele ajutătoare din acesta, adăugînd restricţia

$$x_1 \leqslant 27, \text{ respectiv: } x_1 \geqslant 28.$$

Notăm aceste modele cu $M^{(1)}$, respectiv $M^{(2)}$. Rezolvarea modelului $M^{(1)}$ este realizată în tabelul I.37 adăugînd restricţia suplimentară secţiunii S_2 din tabelul I.36. Pentru rezolvarea modelului $M^{(2)}$ facem în $M^{(0)}$ substituţia

$$y_1 = x_1 - 28$$

care conduce la următoarea formă a sa:

$$[\max]\, z = 4y_1 + 4x_2 + 5x_3 + 112,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 36, \\ 2y_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 94, \end{cases}$$

$$y_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.37

c_B	B	d	4	4	5	0	0	0	θ	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
5	a_3	150/7	11/14	0	1	5/14	—1/7	0	300/11	
4	a_2	120/7	—1/14	1	0	—3/14	2/7	0	—	S_4
0	a_6	27	**1**	0	0	0	0	1	27	
$c_j—z_j$		—	5/14	0	0	—13/14	—3/7	0	—	
5	a_3	3/14	0	0	1	5/14	—1/7	—11/14	—	
4	a_2	267/14	0	1	0	—3/14	2/7	1/14	—	S_5
4	a_1	27	1	0	0	0	0	1	—	
$c_j—z_j$		—	0	0	0	—13/14	—3/7	—5/14	—	

Rezolvarea efectivă a acestui model este realizată în tabelul I.38, pornind de la secţiunea S_3 a tabelului I.36, în care se modifică coloana d, recalculată după cum urmează:

$$\tilde{X}_B = B^{-1} \cdot \tilde{d} = \begin{Vmatrix} 5/11 & -2/11 \\ -2/11 & 3/11 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 36 \\ 94 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} — & 8/11 \\ & 210/11 \end{Vmatrix}.$$

Tabelul I.38

c_B	B	d	4	4	5	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
4	a_1	—8/11	1	0	14/11	5/11	**—2/11**	
4	a_2	210/11	0	1	1/11	—2/11	3/11	S_6
$c_j—z_j$		—	0	0	—5/11	—14/11	—4/11	
0	a_5	4	—11/2	0	—7	—5/2	1	
4	a_2	18	3/2	1	2	1/2	0	S_7
$c_j—z_j$		—	—2	0	—3	—2	0	

În acest fel, s-a ajuns la arborele din figura I.5, care ne indică modelul $M^{(1)}$ cu care trebuie să construim. Deoarece acesta are componenta x_2 neîntreagă în soluţie, construim modelele ajutătoare $M^{(3)}$ şi $M^{(4)}$, adăugînd la $M^{(1)}$ restricţia

$$x_2 \leqslant 19, \text{ respectiv: } x_2 \geqslant 20.$$

Scanned with OKEN Scanner

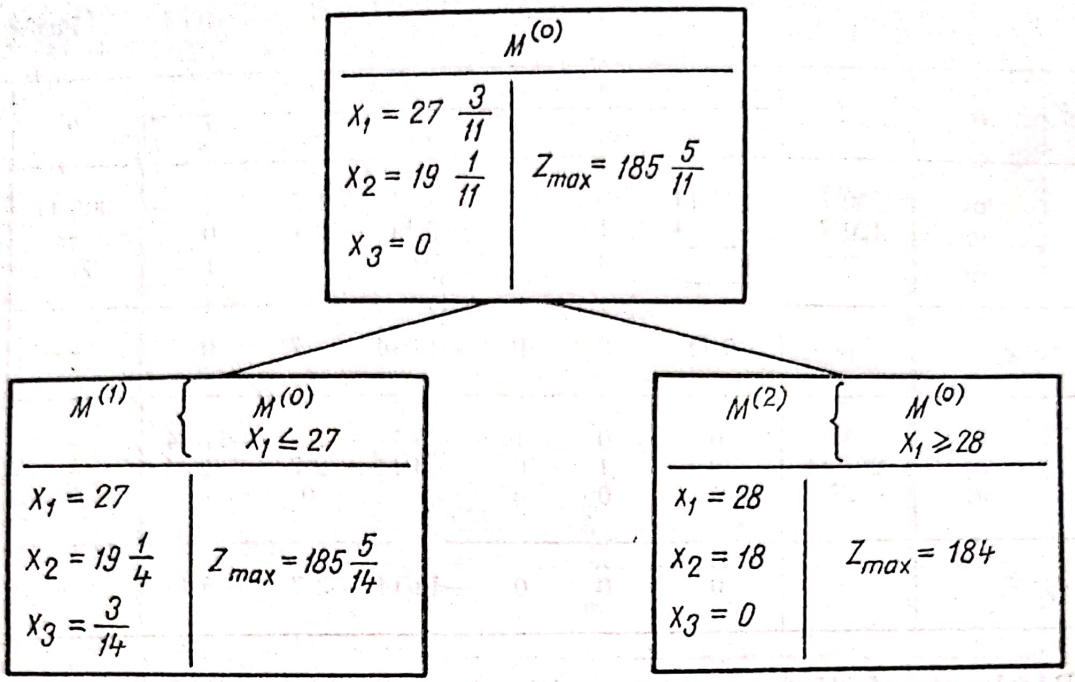


Fig. I.5

Rezolvarea modelului $M^{(3)}$ este realizată în tabelul I.39, iar pentru rezolvarea modelului $M^{(4)}$ se face în modelul $M^{(0)}$ substituţia

$$y_2 = x_2 - 20,$$

căpătînd astfel următoarea formă:

$$[\max]\, z = 4x_1 + 4y_2 + 5x_3 + 80,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2y_2 + 4x_3 \leqslant 80, \\ 2x_1 + 5y_2 + 3x_3 \leqslant 50, \end{cases}$$

$$x_1,\ y_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

Rezolvarea acestui model este conţinută în tabelul I.40.

S-a ajuns astfel la arborele din figura I.6, din care se vede că ar trebui să construim modelul $M^{(3)}$. Soluţia optimă a acestui model are însă componente întregi pentru x_1 şi x_2, deci ea constituie un program optim pentru modelul M.

b) Deoarece soluţia optimă a modelului $M^{(3)}$ are componentă neîntreagă pentru x_3, vom construi alte două modele ajutătoare, $M^{(5)}$ şi $M^{(6)}$, adăugînd lui $M^{(3)}$ restricţia

$$x_3 \leqslant 0, \text{ respectiv: } x_3 \geqslant 1.$$

Pentru modelul $M^{(5)}$ va trebui să avem evident $x_3=0$, ceea ce dă posibilitatea unei rezolvări geometrice a modelului rămas. Se obţine astfel soluţia optimă:

$$x_1 = 27,\quad x_2 = 19,\quad x_3 = 0,\quad z_{\max} = 184.$$

Pentru rezolvarea modelului $M^{(6)}$, facem în $M^{(3)}$ substituţia:

$$y_3 = x_1 - 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.39

C_B	B	d	4 a_1	4 a_2	5 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_7	0 a_8	θ	
0	a_4	120	3	2	[4]	1	0	0	0	30	
0	a_5	150	2	5	3	0	1	0	0	50	
0	a_7	27	1	0	0	0	0	1	0	—	S_8
0	a_8	19	0	1	0	0	0	0	1	—	
c_j-z_j		—	4	4	5	0	0	0	0	—	
5	a_3	30	3/4	1/2	1	1/4	0	0	0	60	
0	a_5	60	−1/4	[7/2]	0	−3/4	1	0	0	120/7	
0	a_7	27	1	0	0	0	0	1	0	—	S_9
0	a_8	19	0	1	0	0	0	0	1	19	
c_j-z_j		—	1/4	3/2	0	−5/4	0	0	0	—	
5	a_3	150/7	11/14	0	1	5/14	−1/7	0	0	300/11	
4	a_2	120/7	−1/14	1	0	−3/14	2/7	0	0	—	
0	a_7	27	1	0	0	0	0	1	0	27	S_{10}
0	a_8	13/7	[1/14]	0	0	3/14	−2/7	0	1	26	
c_j-z_j		—	5/14	0	0	−13/14	−3/7	0	0	—	
5	a_3	1	0	0	1	−2	3	0	−11	1/3	
4	a_2	19	0	1	0	0	0	0	1	—	
0	a_7	1	0	0	0	−3	[4]	1	−14	1/4	S_{11}
4	a_1	26	1	0	0	3	−4	0	14	—	
c_j-z_j		—	0	0	0	−2	1	0	−5	—	
5	a_3	1/4	0	0	1	1/4	0	−3/4	−1/2	—	
4	a_2	19	0	1	0	0	0	0	1	—	
0	a_5	1/4	0	0	0	−3/4	1	1/4	−7/2	—	S_{12}
4	a_1	27	1	0	0	0	0	1	0	—	
c_j-z_j		—	0	0	0	−5/4	0	−1/4	−3/2	—	

ceea ce face ca vectorul termenilor liberi din acest model să se modifice, căpătînd următoarea formă:

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} 116 \\ 147 \\ 27 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.40

C_B	B	d	4 a_1	4 a_2	5 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	θ	
0	a_4	80	3	2	4	1	0	0	80/3	
0	a_5	50	[2]	5	3	0	1	0	25	S_{13}
0	a_6	27	1	0	0	0	0	1	27	
$c_j - z_j$		—	4	4	5	0	0	0	—	
0	a_4	5	0	—11/2	—1/2	1	—3/2	0	—	
4	a_1	25	1	5/2	3/2	0	1/2	0	—	S_{14}
0	a_6	2	0	—5/2	—3/2	0	—1/2	1	—	
$c_j - z_j$		—	0	—6	—1	0	—2	0	—	

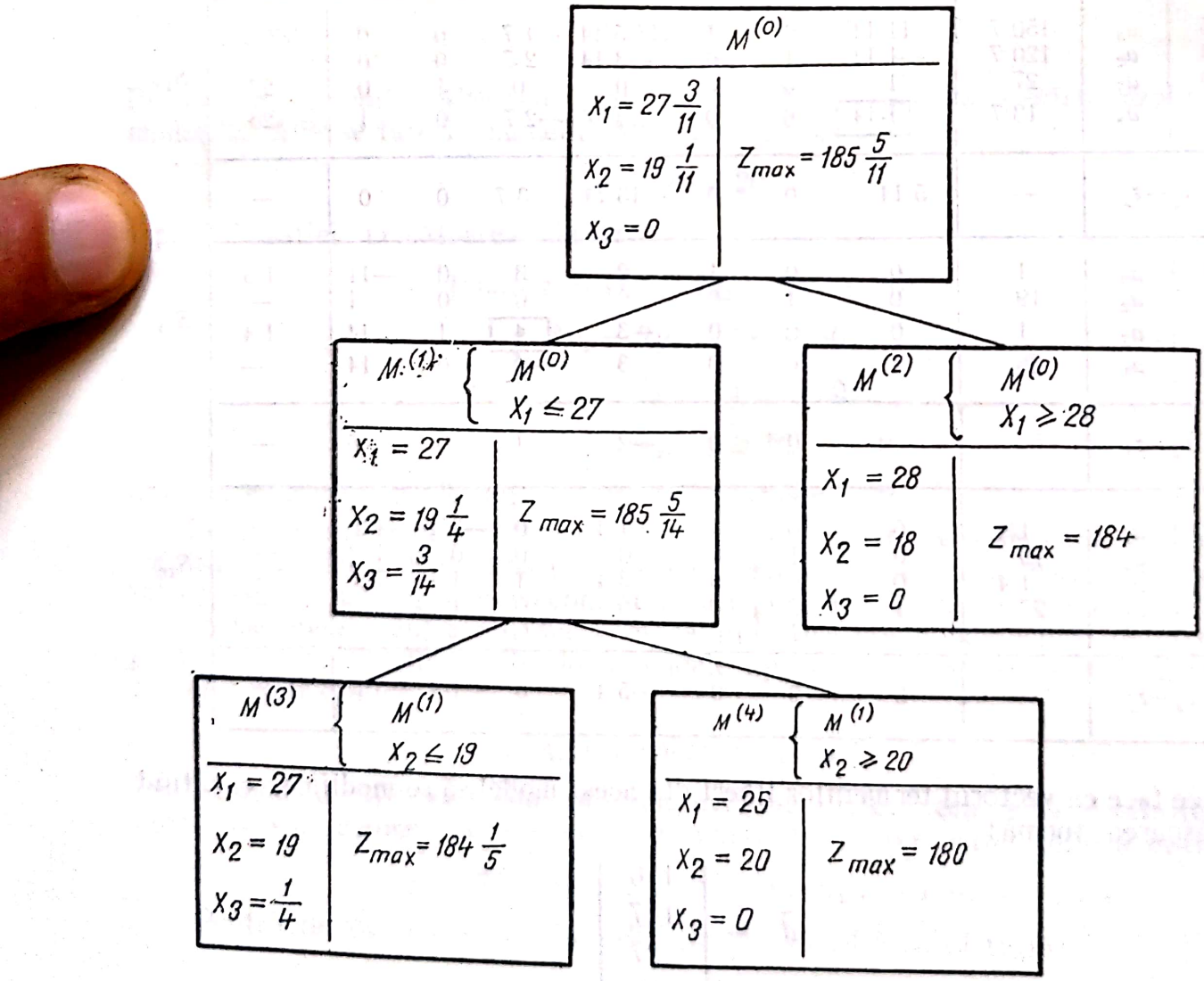


Fig. I.6

Scanned with OKEN Scanner

Restul modelului rămînînd neschimbat, recalculăm coloana d din secţiunea S_{12} a tabelului I.39 astfel:

$$\tilde{X}_B = B^{-1} \cdot \tilde{d} = \begin{Vmatrix} 1/4 & 0 & -3/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1 & 1/4 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 116 \\ 147 \\ 27 \\ 19 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3/4 \\ 19 \\ 1/4 \\ 27 \end{Vmatrix}.$$

Calculele sînt reluate de la această secţiune în tabelul I.41 obţinîndu-se soluţia optimă a modelului $M^{(6)}$. Cercetînd arborele din figura I.7, deducem că soluţia modelului $M^{(6)}$ reprezintă şi un program optim pentru modelul iniţial, în care toate componentele trebuie să fie întregi (inclusiv x_3).

Tabelul I.41

c_B	B	d	4	4	5	0	0	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_7	a_8	
5	a_3	−3/4	0	0	1	1/4	0	[−3/4]	−1/2	
4	a_2	19	0	1	0	0	0	0	1	
0	a_5	1/4	0	0	0	−3/4	1	1/4	−7/2	S_{15}
4	a_1	27	1	0	0	0	0	1	0	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	−5/4	0	−1/4	−3/2	
0	a_7	1	0	0	−4/3	−1/3	0	1	1/3	
4	a_2	19	0	1	0	0	0	0	1	
0	a_5	0	0	0	1/3	−2/3	1	0	−11/3	S_{16}
4	a_1	26	1	0	4/3	1/3	0	0	−2/3	
$c_j - z_j$		—	0	0	−1/3	−4/3	0	0	−4/3	

§ 3. PROBLEME PROPUSE

1. Pentru producerea unor piese trebuie folosiţi anumiţi muncitori, aleşi din trei categorii notate cu C_1, C_2 şi C_3. Un muncitor din prima categorie poate produce 7 piese pe zi, un muncitor din cea de a doua categorie poate produce 10 piese pe zi, iar un muncitor din cea de a treia categorie poate produce 8 piese pe zi. Pierderile zilnice datorate scoaterii unui muncitor de la vechiul loc de muncă sînt estimate, pentru cele trei categorii, la 5, 9, respectiv 9 unităţi băneşti. Să se determine cîţi muncitori din fiecare categorie trebuie să se ocupe cu producerea noilor piese, astfel încît numărul lor total să nu depăşească 120 de muncitori, ei să poată produce cel puţin 1000 de piese zilnic, iar pierderile totale datorate scoaterii lor de la vechile locuri de muncă să fie minime.

Scanned with OKEN Scanner

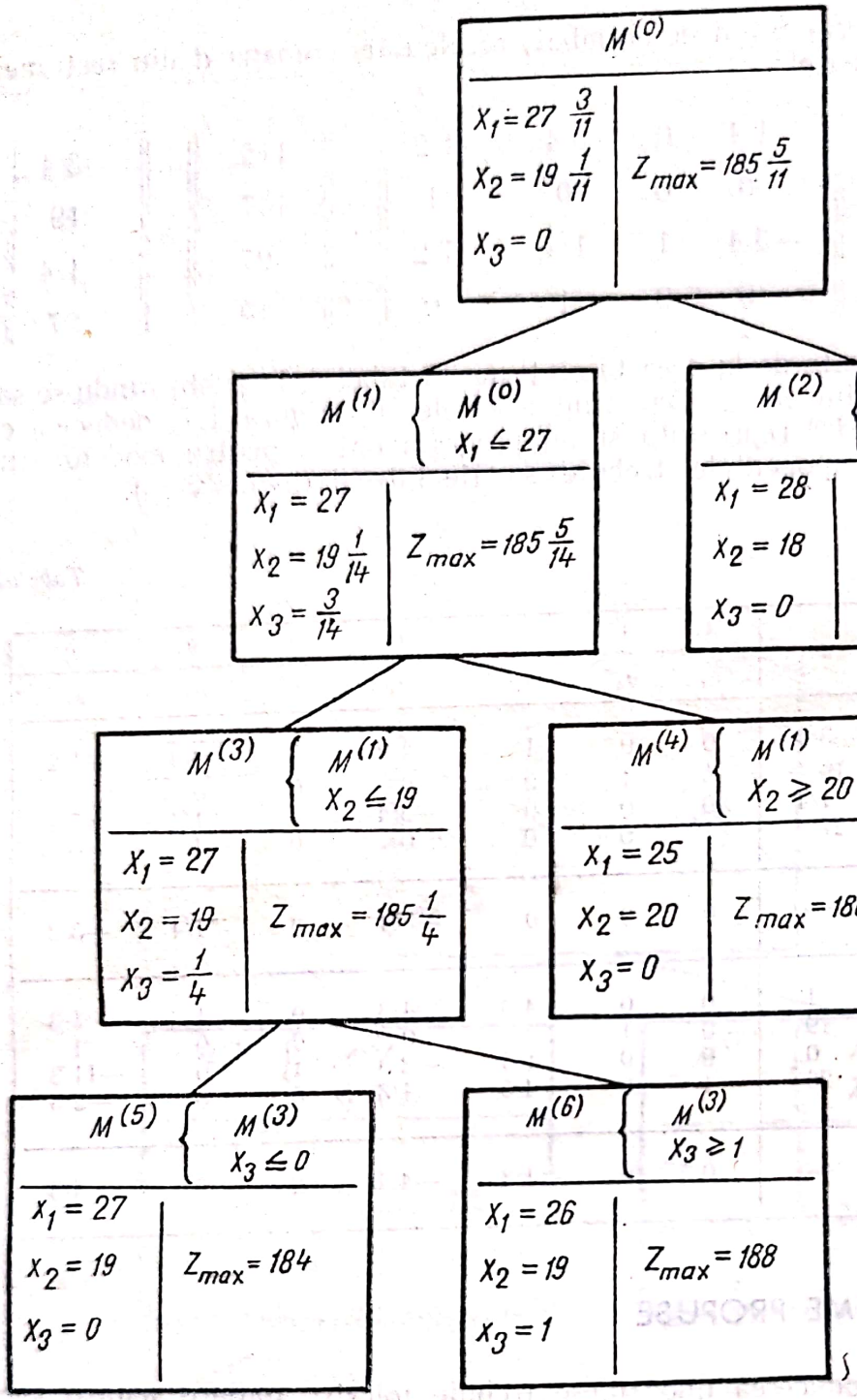


Fig. I.7

Soluție. Notînd cu x_1, x_2, x_3 numărul de muncitori respectiv din categoriile C_1, C_2 și C_3, problema are două soluții și anume:

$$\begin{cases} x_1=66, \\ x_2=53, \\ x_3=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=66, \\ x_2=54, \\ x_3=0. \end{cases}$$

2. Pentru determinarea a două tipuri de produse, P_1 și P_2, se folosesc — pe lîngă alte materii prime — două resurse (R_1 și R_2) ale căror rezerve sînt

Scanned with OKEN Scanner

limitate. Consumurile specifice ale produselor în cele două resurse, cantităţile disponibile din R_1 şi R_2, precum şi cîştigurile determinate prin realizarea unei unităţi din fiecare produs sînt date în tabelul I.42.

Tabelul I.42

Produse / Resurse	P_1	P_2	Disp.
R_1	3	4	76
R_2	1	4	50
Cîştig	3	5	—

a) Să se determine un plan optim de producţie (cu cîştig total maxim), în cazul în care produsul P_2 este indivizibil, iar produsul P_1 este divizibil.

b) Să se determine un plan optim de producţie în cazul cînd ambele produse sînt indivizibile.

Soluţie. a) Se vor produce $x_1 = \frac{40}{3}$ unităţi din P_1 şi 9 unităţi din P_2, ceea ce conduce la un cîştig total de 85 unităţi băneşti.

b) Se vor produce 13 unităţi din P_1 şi 9 unităţi din P_2, ceea ce conduce la un cîştig total de 84 unităţi băneşti.

3. Pentru realizarea produselor P_1, P_2 şi P_3, se folosesc materiile prime M_1, M_2 şi M_3. Consumurile specifice de materii prime, cantităţile disponibile din M_1, M_2 şi M_3, precum şi cîştigurile obţinute prin realizarea unei unităţi din fiecare tip de produs sînt date în tabelul I.43.

Tabelul I.43

Produse / Materii prime	P_1	P_2	P_3	Disp.
M_1	3	2	5	150
M_2	4	5	1	200
M_3	0	2	6	120
Cîştig	4	2	7	—

a) Să se determine un plan de producţie care să dea un cîştig total maxim, în cazul în care produsele P_1 şi P_2 sînt indivizibile, produsul P_3 putînd fi divizibil.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine un plan de producție optim în cazul în care toate produsele sînt indivizibile.

Soluție. Fie x_1, x_2 și x_3 cantitățile produse respectiv din produsele P_1, P_2 și P_3.
a) Soluția optimă în primul caz este următoarea:

$$x_1 = 17,\ x_2 = 0,\ x_3 = 19{,}8,$$

cu cîștigul total de 206,6 unități bănești.
b) Soluția optimă în cel de-al doilea caz este următoarea:

$$x_1 = 20,\ x_2 = 0,\ x_3 = 18,$$

cu cîștigul total de 206 unități bănești.

4. Se urmărește înființarea unei secții a unei întreprinderi în care să se prelucreze piesele turnate, în vederea obținerii unor semifabricate necesare întreprinderii. În acest scop trebuie achiziționate strungurile ce vor lucra în această secție. Pentru aceasta se poate face o alegere între trei tipuri de strunguri, S_1, S_2 și S_3, care se deosebesc prin numărul mediu de piese ce pot prelucra pe oră, precum și prin cheltuielile lunare de întreținere, conform tabelului I.44.

Tabelul I.44

Tipuri strung / Caracteristici	S_1	S_2	S_3
Nr. de piese pe oră	3	3,5	4
Cheltuieli întreținere	4	5	4

Să se determine numărul de strunguri de fiecare tip ce trebuie achiziționate, astfel încît numărul lor total să nu depășească 15 strunguri, iar cheltuielile totale de întreținere să fie minime.

Soluție. Se vor achiziționa 3 strunguri de tipul S_1 și 9 strunguri de tipul S_3.

§ 4. PROBLEME ÎN CARE FUNCȚIA DE EFICIENȚĂ ESTE LINIARĂ PE PORȚIUNI

Practica economică pune deseori probleme ale căror modele matematice au restricții liniare, dar în care funcția de eficiență nu este liniară, avînd diferite expresii pe anumite submulțimi ale mulțimii soluțiilor realizabile, fiecare

Scanned with OKEN Scanner

dintre aceste expresii fiind însă liniară. Forma generală a unui astfel de model este următoarea:

$$[\text{opt}]\ z = \sum_{j=1}^{n} u_j(x_j),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1,2,\ldots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geqslant b_i, \qquad i = s+1,\ s+2,\ldots, s+t,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \qquad i = s+t+1,\ s+t+2,\ldots, m,$$

$$x_j \leqslant h_{jr}, \qquad j = 1,2,\ldots, n,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,2,\ldots, n,$$

unde avem:

$$u_j(x_j) = \begin{cases} c_{j1}\, x_j, \text{ pentru } x_j \in [0,\ h_j], \\ c_{j1}\, h_{j1} + c_{j2}\,(x_j - h_{j1}), \text{ pentru } x_j \in (h_{j1},\ h_{j2}), \\ c_{j1}\, h_{j1} + c_{j2}\,(h_{j2} - h_{j1}) + c_{j3}\,(x_j - h_{j2}), \text{ pentru } x_j \in (h_{j2},\ h_{j3}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{j1}\, h_{j1} + c_{j2}\,(h_{j2} - h_{j1}) + \ldots + c_{j,r-1}\,(h_{j,r-1} - h_{j,r-2}) + \\ \qquad + c_{jr}\,(x_j - h_{j,r-1}), \text{ pentru } x_j \in (h_{j,r-1},\ h_{jr}), \end{cases}$$

cu condiția suplimentară:

$$c_{j1} < c_{j2} < c_{j3} < \ldots < c_{jr} \tag{1}$$

pentru cazul în care se cere minimul funcției de eficiență, respectiv

$$c_{j1} > c_{j2} > c_{j3} > \ldots > c_{jr}, \tag{1'}$$

pentru cazul în care se cere maximul funcției de eficiență, eventual ultimul interval putînd fi nemărginit superior ($h_{jr}=\infty$). Menționăm că indicele r poate depinde de variabila x_j corespunzătoare, numărul de intervale folosite fiind diferit pentru diferiți termeni de tipul $u_j(x_j)$. Condițiile (1), (1') asigură convexitate, respectiv concavitate funcției reprezentate de termenul $u_j(x_j)$ din funcția de eficiență, graficul acestei funcții avînd forma celui din figura I.8, *a*, pentru cazul în care se cere minimul funcției de eficiență, respectiv din figura I.8,*b* pentru cazul în care se cere maximul funcției de eficiență.

Modelul de mai sus poate fi redus la un model liniar, dacă se înlocuiesc variabilele x_j, $j=1,2,\ldots,n$, prin suma altor r variabile x_{j1}, x_{j2}, $x_{j3},\ldots,x_{jr}$, care îndeplinesc următoarele condiții:

$$x_{j1} \leqslant h_{j1}, \qquad x_{j3} \leqslant h_{j3} - h_{j2},$$
$$x_{j2} \leqslant h_{j2} - h_{j1}, \qquad x_{jr} \leqslant h_{jr} - h_{j,r-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

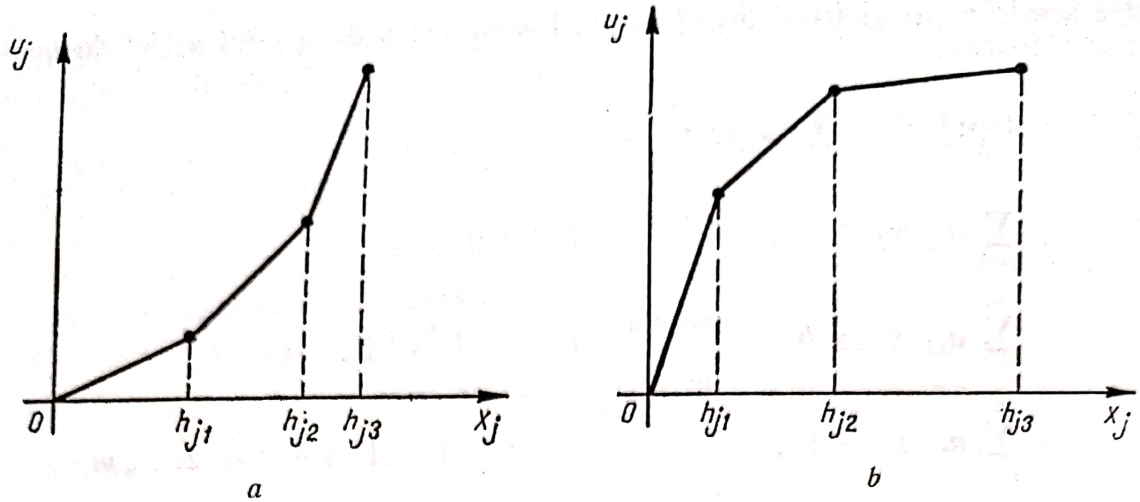


Fig. I.8

termenul $u_j(x_j)$ din funcţia de eficienţă căpătînd forma de mai jos:

$$u_j(x_j) = c_{j1}\,x_{j1} + c_{j2}\,x_{j2} + c_{j3}\,x_{j3} + \ldots + c_{jr}\,x_{jr}.$$

Fiind evident faptul că variabilele nou introduse se supun condiţiilor de nenegativitate şi făcînd substituţia:

$$x_j = x_{j1} + x_{j2} + x_{j3} + \ldots + x_{jr},\ j = 1,2,\ldots,n,$$

vechile condiţii de nenegativitate devin inutile, de asemenea şi restricţiile de tipul $x_j \leqslant h_{jr}$, ele fiind consecinţele condiţiilor impuse noilor variabile.

Din condiţiile (1) şi (1′), deducem că în rezolvarea modelului liniar obţinut valoarea unei variabile x_{jk} nu poate fi diferită de zero în soluţia optimă, fără ca toate restricţiile de forma:

$$x_{jl} \leqslant h_{jl} - h_{j,l-1},$$

cu $l<k$, să fie verificate ca egalităţi. Cu alte cuvinte, faptul că $x_{jk}>0$ în soluţia optimă implică: $x_{jl} = h_{jl} - h_{j,l-1}$, pentru $l < k$. După cum se vede din exemplele aplicative prezentate în continuare, în rezolvarea modelului liniar obţinut ca mai sus se poate evita uneori aplicarea algoritmului simplex, folosind — în funcţia de forma particulară a acestui model — unele algoritme speciale, ca de exemplu cele legate de rezolvarea problemelor de tip transport.

§ 5. PROBLEME REZOLVATE

1. La fabricarea a trei tipuri de produse, P_1, P_2 şi P_3, participă trei maşini, notate cu M_1, M_2 şi M_3, astfel încît acelaşi produs trece, în prelucrarea lui, pe la toate cele trei maşini. Timpul de lucru al fiecărei maşini la o unitate de produs de fiecare tip, precum şi timpul total disponibil al fiecărei maşini sînt date în tabelul I.45. Există posibilitatea vinderii imediat după fabricare a cel mult 50 unităţi din fiecare tip de produs, şi în acest caz se obţine un cîştig net de 4 u.b., 6 u.b. şi 7 u.b. la unitatea de produs fabricat şi vîndut respectiv

Tabelul 1.45

Produse / Mașini	P_1	P_2	P_3	Disp.
M_1	2	3	4	320
M_2	3	2	2	300
M_3	1	2	4	200

din P_1, P_2 și P_3. Pentru fiecare tip de produs, întreprinderea are o capacitate maximă de producție de 60 unități, iar cantitatea fabricată peste cele 50 unități din produsul respectiv poate aduce un cîștig net de 3 u.b., 4,5 u.b. și 5 u.b. pe unitatea din P_1, P_2 respectiv P_3, intervenind cheltuielile suplimentare de întreținere, stocare etc. În aceste condiții, să se determine un plan de producție care să conducă la un cîștig net total maxim.

Rezolvare. Notînd cu x_1, x_2 și x_3 cantitățile ce trebuie fabricate respectiv din produsele P_1, P_2 și P_3, modelul matematic al problemei capătă următoarea formă:

$$[\max]\ z = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 320, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 300, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 200, \\ x_1 \leqslant 60, \\ x_2 \leqslant 60, \\ x_3 \leqslant 60, \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,2,3, \end{cases}$$

unde am făcut pentru prescurtare următoarele notații:

$$u_1(x_1) = \begin{cases} 4x_1, \text{ pentru } x_1 \in [0,\ 50], \\ 200 + 3(x_1 - 50), \text{ pentru } x_1 \in (50,\ 60]; \end{cases}$$

$$u_2(x_2) = \begin{cases} 6x_2, \text{ pentru } x_2 \in [0,\ 50], \\ 300 + 4{,}5(x_2 - 50), \text{ pentru } x_2 \in [50,\ 60], \end{cases}$$

$$u_3(x_3) = \begin{cases} 7x_3, \text{ pentru } x_3 \in [0,\ 50], \\ 350 + 5(x_3 - 50), \text{ pentru } x_3 \in [50,\ 60]. \end{cases}$$

Se observă ușor că funcția de eficiență poate fi scrisă sub forma a opt expresii diferite, obținute prin combinarea în toate modurile posibile a expresiilor atașate lui $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$ și $u_3(x_3)$, în funcție de valorile variabilelor, toate

Scanned with OKEN Scanner

aceste expresii fiind liniare în variabilele modelului. Dăm pentru exemplificare două dintre aceste expresii:

$z = 4x_1+6x_2+7x_3$, pentru: $x_1 \in [0, 50]$, $x_2 \in [0, 50]$ și $x_3 \in [0, 50]$;

$z = 4x_1 + 6x_2 + 350 + 5(x_3 - 50) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 100$, pentru:

$x_1 \in [0, 50]$, $x_2 \in [0, 50]$ și $x_3 \in [50, 60]$.

Pentru reducerea modelului de mai sus la un model liniar, vom introduce alte șase variabile, notate și interpretate după cum urmează:

y_1 = cantitatea fabricată din P_1 care furnizează un cîștig net de 4 u.b. la unitatea de produs,

y_1' = cantitatea fabricată din P_1, care furnizează un cîștig net de 3 u.b. la unitatea de produs,

y_2 = cantitatea fabricată din P_2, care furnizează un cîștig net de 6 u.b. la unitatea de produs,

y_2' = cantitatea fabricată din P_2, care furnizează un cîștig net de 4,5 u.b. la unitatea de produs,

y_3 = cantitatea fabricată din P_3, care furnizează un cîștig net de 7 u.b. la unitatea de produs,

y_3' = cantitatea fabricată din P_3, care furnizează un cîștig net de 5 u.b. la unitatea de produs.

Avem evident:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_1', \\ x_2 = y_2 + y_2', \\ x_3 = y_3 + y_3' \end{cases}$$

și făcînd substituția corespunzătoare în modelul matematic de mai sus, acesta capătă următoarea formă:

$$[\max]\ z = 4y_1 + 3y_2' + 6y_2 + 4{,}5y_2' + 7y_3 + 5y_3',$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_1' + 3y_2 + 3y_2' + 4y_3 + 4y_3' \leqslant 320, \\ 3y_1 + 3y_1' + 2y_2 + 2y_2' + 2y_3 + 2y_3' \leqslant 300, \\ y_1 + y_1' + 2y_2 + 2y_2' + 4y_3 + 4y_3' \leqslant 200, \\ y_1 \leqslant 50, \quad y_1' \leqslant 10, \quad y_j \leqslant 0, \quad j = 1,2,3, \\ y_2 \leqslant 50, \quad y_2' \leqslant 10, \quad y_j' \leqslant 0, \quad j = 1,2,3. \\ y_3 \leqslant 50, \quad y_3' \leqslant 10, \end{cases}$$

Rezolvarea acestui model este făcută cu ajutorul algoritmului simplex în tabelul I.46 din care se vede că programul optim al lui este următorul:

$$[S] \begin{cases} y_1 = 50, & y_2 = 50, & y_3 = 3, \\ y_1' = 6, & y_2' = 10, & y_3' = 0, \\ & z_{max} = 605. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

C_B	B	d	4	3	6	9/2	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			a_1	a_1'	a_2	a_2'	a_3	a_3'	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	0	
0	a_4	320	2	2	3	3	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	80	
0	a_5	300	3	3	2	2	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	150	
0	a_6	200	1	1	2	2	$\boxed{4}$	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	50	
0	a_7	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_8	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	S_0
0	a_9	50	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	50	
0	a_{10}	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{12}	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	4	3	6	9/2	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—	
0	a_4	120	1	1	1	1	0	0	1	0	−1	0	0	0	0	0	0	120	
0	a_5	200	5/2	5/2	1	1	0	0	0	1	−1/2	0	0	0	0	0	0	200	
7	a_3	50	1/4	1/4	1/2	1/2	1	1	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0	100	
0	a_7	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_8	50	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	50	S_1
0	a_9	0	−1/4	−1/4	−1/2	−1/2	0	−1	0	0	−1/4	0	0	1	0	0	0	—	
0	a_{10}	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	9/4	5/4	5/2	1	0	−2	0	0	−7/4	0	0	0	0	0	0	—	
0	a_4	70	1	1	0	1	0	0	1	0	−1	0	−1	0	0	0	0	70	
0	a_5	150	5/2	5/2	0	1	0	0	0	1	−1/2	0	−1	0	0	0	0	60	
7	a_3	25	1/4	1/4	0	1/2	1	1	0	0	1/4	0	−1/2	0	0	0	0	100	
0	a_7	50	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	50	S_2
6	a_2	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_9	25	−1/4	−1/4	0	−1/2	0	−1	0	0	−1/4	0	1/2	1	0	0	0	—	
0	a_{10}	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{12}	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	9/4	5/4	0	1	0	−2	0	0	−7/4	0	−5/2	0	0	0	0	—	
0	a_4	20	0	1	0	1	0	0	1	0	−1	−1	−1	0	0	0	0	20	
0	a_5	25	0	$\boxed{5/2}$	0	1	0	0	0	1	−1/2	−5/2	−1	0	0	0	0	10	
0	a_3	25/2	0	1/4	0	1/2	1	1	0	0	1/4	−1/4	−1/2	0	0	0	0	50	
7	a_1	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
4	a_2	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	S_3
6	a_9	75/2	0	−1/4	0	−1/2	0	−1	0	0	−1/4	1/4	1/2	1	0	0	0	—	
0	a_{10}	10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	10	
0	a_{11}	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{12}	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	0	5/4	0	1	0	−2	0	0	−7/4	−9/4	−5/2	0	0	0	0	—	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.46 (continuare)

C_B	B	d	4	3	6	9/2	7	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ	
			a_1	a'_1	a_2	a'_2	a_3	a'_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}		
0	a_4	10	0	0	0	3/5	0	0	1	—2/5	—4/5	0	—3/5	0	0	0	0	50/3	
3	a'_1	10	0	1	0	2/5	0	0	0	2/5	—1/5	—1	—2/5	0	0	0	0	25	
7	a_3	10	0	0	0	2/5	1	1	0	—1/10	3/10	0	—2/5	0	0	0	0	25	
4	a_1	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
6	a_2	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_9	40	0	0	0	—2/5	0	—1	0	1/10	—3/10	0	2/5	1	0	0	0	—	S_4
0	a_{10}	0	0	0	0	—2/5	0	0	0	—2/5	1/5	1	2/5	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	10	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	10	
0	a_{12}	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	1/2	0	—2	0	—1/2	—3/2	—1	—2	0	0	0	0	—	
0	a_4	4	0	0	0	0	0	0	1	—2/5	—4/5	0	—3/5	0	0	—3/5	0	—	
3	a'_1	6	0	1	0	0	0	0	0	2/5	—1/5	—1	—2/5	0	0	—2/5	0	—	
7	a_3	6	0	0	0	0	1	1	0	—1/10	3/10	0	—2/5	0	0	—2/5	0	—	
4	a_1	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
6	a_2	50	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_9	44	0	0	0	0	0	—1	0	1/10	—3/10	0	2/5	1	0	2/5	0	—	S_5
0	a_{10}	4	0	0	0	0	0	0	0	—2/5	1/5	1	2/5	0	1	2/5	0	—	
9/2	a'_2	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{12}	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	0	—2	0	—1/2	—3/2	—1	—2	0	0	—1/2	0	—	

Rezultă următorul program optim al modelului inițial:

$$x_1 = y_1 + y'_1 = 56, \qquad x_3 = y_3 + y'_3 = 6,$$
$$x_2 = y_2 + y'_2 = 60, \qquad z_{max} = 605.$$

Urmează deci să se producă din cele trei tipuri de produse respectiv 56, 60 și 6 unități, obținîndu-se un cîștig net total maxim de 605 u.b.

Problema 2. Pentru producerea a trei metale M_1, M_2 și M_3, pot fi folosite trei tipuri de minereuri, notate cu Q_1, Q_2 și Q_3, minereuri ce conțin în proporții diferite metalele necesare. Proporțiile în care cele trei minereuri conțin metalele urmărite sînt date în procente în tabelul I.47, care mai conține și cantitățile minime, în tone, ce trebuie obținute din cele trei metale.

Tabelul I.47

Minereuri / Metale	Q_1	Q_2	Q_3	Nec.
M_1	10	0	20	10
M_2	5	15	10	20
M_3	20	10	0	15

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește aprovizionarea cu fiecare tip de minereu, aceasta se face la un preț ce depinde de cantitatea dorită, după cum urmează:

— pentru M_1 se plătesc 5 u.b. pe unitate, pentru o cantitate de cel mult 50 tone, putîndu-se suplimenta această cantitate cu încă 20 tone, dar la un preț de 7 u.b.;

— pentru M_2 se plătesc 3 u.b. pe unitate, pentru o cantitate de cel mult 80 tone, putîndu-se suplimenta această cantitate cu încă 20 tone, dar la prețul de 4 u.b.;

— pentru M_3 se plătesc 4 u.b. pe unitate, pentru cel mult 50 tone, putîndu-se suplimenta această cantitate cu încă 50 tone, dar la prețul de 5 u.b.

Să se determine cu ce cantități din cele trei minereuri trebuie să se aprovizioneze întreprinderea, astfel încît să se asigure cel puțin cantitățile necesare de metale, la un cost total minim.

Rezolvare. Vom fixa de la început următoarele variabile:

x_1 = cantitatea din M_1, cumpărată cu prețul de 5 u.b.,
x_1' = cantitatea din M_1, cumpărată cu prețul de 7 u.b.,
x_2 = cantitatea din M_2, cumpărată cu prețul de 3 u.b.,
x_2' = cantitatea din M_2, cumpărată cu prețul de 4 u.b.,
x_3 = cantitatea din M_3, cumpărată cu prețul de 4 u.b.,
x_3' = cantitatea din M_3, cumpărată cu prețul de 5 u.b.

Cu aceste notații modelul matematic al problemei are forma următoare:

$$[\min] z = 5x_1 + 7x_1' + 3x_2 + 4x_2' + 4x_3 + 5x_3',$$

$$\begin{cases} x_1 + x_1' + 2x_2 + 2x_2' \geqslant 100, \\ x_1 + x_1' + 3x_2 + 3x_2' + 2x_3 + 2x_3' \geqslant 400, \\ 2x_1 + 2x_1' + x_2 + x_2' \geqslant 150, \\ x_1 \leqslant 50, \quad x_2 \leqslant 80, \quad x_3 \leqslant 50, \\ x_1' \leqslant 20, \quad x_2' \leqslant 20, \quad x_3' \leqslant 50, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \ j = 1,2,3,$$

$$x_j' \geqslant 0, \ j = 1,2,3.$$

Introducînd variabilele de compensare, sistemul de restricții capătă următoarea formă:

$$\begin{cases} x_1 + x_1' + 2x_3 + 2x_3' - x_4 = 100, \\ x_1 + x_1' + 3x_2 + 3x_2' + 2x_3 + 2x_3' - x_5 = 400, \\ 2x_1 + 2x_1' + x_2 + x_2' - x_6 = 150, \\ x_1 + x_7 = 50, \quad x_2 + x_9 = 80, \quad x_3 + x_{11} = 50, \\ x_1' + x_8 = 20, \quad x_2' + x_{10} = 20, \quad x_3' + x_{12} = 50. \end{cases}$$

Pentru a obține cît mai mulți vectori unitari, copiem cea de a doua restricție avînd cel mai mare termen liber, apoi din ea scădem pe rînd următoarele

Scanned with OKEN Scanner

două restricții, celelalte rămînînd neschimbate. În sfîrșit, introducînd și o variabilă artificială x_{13}, sistemul de restricții capătă următoarea formă de lucru (conține baza inițială):

$$\begin{cases} x_1 + x_1' + 3x_2 + 3x_2' + 2x_3 + 2x_3' - x_5 + x_{13} = 400, \\ 3x_2 + 3x_2' - x_5 + x_4 = 300, \\ -x_1 - x_1' + 2x_2 + 2x_2' + 2x_3 + 2x_3' - x_5 + x_6 = 250, \\ x_1 + x_7 = 50, \quad x_2 + x_9 = 80, \quad x_3 + x_{11} = 50, \\ x_1' + x_8 = 20, \quad x_2' + x_{10} = 20, \quad x_3' + x_{12} = 50. \end{cases}$$

În tabelul I.48, pornindu-se de la această formă a sistemului de restricții, se obține următorul program optim al modelului:

$$[S] \begin{cases} x_1 = 25, \quad x_2 = 80, \quad x_3 = 75/2 = 37{,}5, \\ x_1' = 0, \quad x_2' = 20, \quad x_3' = 0, \\ z_{min} = 595. \end{cases}$$

Tabelul I.4

c_B	B	d	5 a_1	7 a_1'	3 a_2	4 a_2'	5 a_3	0 a_3'	M a_5	0 a_{13}	0 a_4	0 a_6	0 a_7	0 a_8	0 a_9	0 a_{10}	0 a_{11}	0 a_{12}	θ	
M	a_{13}	400	1	1	3	3	2	2	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	400/3	
0	a_4	300	0	0	3	3	0	0	−1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	100	
0	a_6	250	−1	−1	2	2	2	2	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	125	
0	a_7	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_8	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_9	80	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	80	S_1
0	a_{10}	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	50	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{12}	50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j - c_j$		—	$M-5$	$M-7$	$3M-3$	$3M-4$	$2M-4$	$2M-5$	$-M$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—	
M	a_{13}	160	1	1	0	3	2	2	−1	1	0	0	0	0	−3	0	0	0	160/3	
0	a_4	60	0	0	0	3	0	0	−1	0	1	0	0	0	−3	0	0	0	20	
0	a_6	90	−1	−1	0	2	2	2	−1	0	0	1	0	0	−2	0	0	0	45	
0	a_7	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_8	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
3	a_2	80	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	S_2
0	a_{10}	20	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	50	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	20	
0	a_{12}	50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j - c_j$		—	$M-5$	$M-7$	0	$3M-4$	$2M-4$	$2M-5$	$-M$	0	0	0	0	0	$-3M+3$	0	0	0	—	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.48 (continuare)

C_B	B	d	5 a_1	7 a'_1	3 a_2	4 a'_2	4 a_3	5 a'_3	0 a_5	M a_{13}	0 a_4	0 a_6	0 a_7	0 a_8	0 a_9	0 a_{10}	0 a_{11}	0 a_{12}	θ	
M	a_{13}	100	1	1	0	0	2	2	—1	1	0	0	0	0	—3	—3	0	0	5	
0	a_4	0	0	0	0	0	0	0	—1	0	1	0	0	0	—3	—3	0	0	—	
0	a_6	50	—1	—1	0	0	[2]	2	—1	0	0	1	0	0	—2	—2	0	0	2	
0	a_7	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_8	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	S_3
3	a_2	80	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	
4	a'_2	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	50	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50	
0	a_{12}	50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j—c_j$		—	M-5	M-7	0	0	2M-4	2M-5	—M	0	0	0	0	0	—3M +3	—3M +4	0	0	—	
M	a_{13}	50	[2]	2	0	0	0	0	0	1	0	—1	0	0	—1	—1	0	0	25	
0	a_1	0	0	0	0	0	0	0	—1	0	1	0	0	0	—3	—3	0	0	—	
4	a_3	25	—1/2	—1/2	0	0	1	1	—1/2	0	0	1/2	0	0	—1	—1	0	0	—	
0	a_7	50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	50	
0	a_8	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	S_4
3	a_2	80	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	
4	a'_2	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{11}	25	1/2	1/2	0	0	0	—1	1/2	0	0	—1/2	0	0	1	1	1	0	100	
0	a_{12}	50	0	0	0	0	0	—1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j—c_j$		—	2M-7	2M-9	0	0	0	—2	—2	0	0	—M +2	0	0	—M —1	—M	0	0		
5	a_1	25	1	1	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	—1/2	1/2	0	0		
0	a_4	0	0	0	0	0	0	0	—1	0	1	0	0	0	—3	—3	0	0		
4	a_3	75/2	0	0	0	0	1	1	1/2	1/4	0	1/4	0	0	—5/4	—5/4	0	0		
0	a_7	50	0	—1	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2	1	0	1/2	1/2	0	0		
0	a_8	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
3	a_2	80	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
4	a'_2	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		
0	a_{11}	25/2	0	0	0	0	0	—1	1/2	—1/4	0	—1/4	0	0	5/4	5/4	1	0		
0	a_{12}	50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
$z_j—c_j$		—	0	—2	0	0	0	—1	—2	X	0	—3/2	0	0	—9/2	—7/2	0	0		

Se va cumpăra deci cantitatea maximă posibilă din minereul M_2, completîndu-se cu 25 tone din M_1 și 37,5 tone din M_3.

Problema 3. Pentru fabricarea produselor P_1 și P_2, se folosesc trei materii prime, M_1, M_2 și M_3, ale căror rezerve sînt limitate. Consumurile specifice ale acestor produse în cele trei tipuri de materii prime, precum și cantităţile disponibile din M_1, M_2 și M_3 sînt date în tabelul I.49. Cîștigul net la unitatea de produs fabricat și vîndut este de 6 u.b. și 3 u.b., respectiv pentru produsele P_1 și P_2, pentru o producţie de cel mult 20 unităţi din fiecare tip de produs. Capacitatea de producţie a întreprinderii în P_1 și P_2 poate fi la nevoie mărită (teoretic nelimitat), ceea ce necesită însă anumite eforturi, care micșorează —

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.49

Materii prime \ Produse	P_1	P_2	Disp.
M_1	2	3	180
M_2	3	1	120
M_3	2	1	80

pentru cantităţile produse suplimentar — cîştigul net la unitatea de produs, cu două, respectiv o unitate bănească.

Să se determine un plan de producţie care, în condiţiile date, să conducă la un cîştig net total maxim.

Rezolvare. Facem următoarele notaţii:

x_1 = cantitatea fabricată din P_1, corespunzătoare unui cîştig de 6 u.b. la unitate,

x_1' = cantitatea fabricată din P_1, corespunzătoare unui cîştig de 4 u.b. la unitate,

x_2 = cantitatea fabricată din P_2, corespunzătoare unui cîştig net de 3 u.b. la unitate,

x_2' = cantitatea fabricată din P_2, corespunzătoare unui cîştig net de 2 u.b. la unitate.

Cu aceste notaţii, modelul matematic al problemei capătă următoarea formă:

$$[\max]\, z = 6x_1 + 4x_1' + 3x_2 + 2x_2',$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_1' + 3x_2 + 3x_2' \leqslant 180, \\ 3x_1 + 3x_1' + x_2 + x_2' \leqslant 120, \\ 2x_1 + 2x_1' + x_2 + x_2' \leqslant 80, \\ x_1 \leqslant 20, \\ x_2 \leqslant 20, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2, \\ x_j' \geqslant 0, \quad j = 1,2. \end{cases}$$

Rezolvarea modelului este făcută în tabelul I.50 din care se extrage programul optim al modelului şi anume:

$$[S] \begin{cases} x_1 = 20, \quad x_2 = 20, \\ x_1' = 20, \quad x_2' = 20, \\ z_{\max} = 160. \end{cases}$$

Urmează deci să se fabrice cîte 40 unităţi din fiecare tip de produs.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.50

C_B	B	d	6 a_1	4 a_1'	3 a_2	2 a_2'	0 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	θ	
0	a_3	180	2	2	3	3	1	0	0	0	0	90	
0	a_4	120	3	3	1	1	0	1	0	0	0	40	
0	a_5	80	2	2	1	1	0	0	1	0	0	40	S_0
0	a_6	20	[1]	0	0	0	0	0	0	1	0	30	
0	a_7	20	0	0	1	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	6	4	3	2	0	0	0	0	0	—	
0	a_3	140	0	2	3	3	1	0	0	−2	0	70	
0	a_4	60	0	[3]	1	1	0	1	0	−3	0	20	
0	a_5	40	0	2	1	1	0	0	1	−2	0	20	S_1
6	a_1	20	1	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_7	20	0	0	1	0	0	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	0	4	3	2	0	0	0	−6	0	—	
0	a_3	100	0	0	7/3	7/3	1	−2/3	0	0	0	300/7	
4	a_1'	20	0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	−1	0	60	
0	a_5	0	0	0	[1/3]	1/3	0	−2/3	1	0	0	0	S_2
6	a_1	20	1	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_7	200	0	0	1	0	0	0	0	0	1	20	
$c_j - z_j$		—	0	0	5/3	2/3	0	−4/3	0	−2	0	—	
0	a_3	100	0	0	0	0	1	4	−7	0	0	25	
4	a_1'	20	0	1	0	0	0	1	−1	−1	0	20	
3	a_2	0	0	0	1	1	0	−2	3	0	0	—	S_3
6	a_1	20	1	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_7	20	0	0	0	−1	0	[2]	−3	0	1	10	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	−1	0	2	−5	−2	0	—	
0	a_3	60	0	0	0	2	1	0	−1	0	−2	30	
4	a_1'	10	0	1	0	[1/2]	0	0	1/2	−1	−1/2	20	
3	a_2	20	0	0	1	0	0	0	0	0	1	—	S_4
6	a_1	20	1	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_4	10	0	0	0	−1/2	0	1	−3/2	0	1/2	—	
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−1	—	
0	a_3	20	0	−4	0	0	1	0	−3	4	0		
2	a_2'	20	0	2	0	1	0	0	1	−2	−1		
3	a_2	20	0	0	1	0	0	0	0	0	1		
6	a_1	20	1	0	0	0	0	0	0	1	0		S_5
0	a_4	20	0	1	0	0	0	1	−1	−1	0		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−1		

Scanned with OKEN Scanner

Problema 4. Pentru fabricarea unui nou tip de piese, o întreprindere trebuie să achiziționeze un număr de cel mult 15 mașini. Se poate face o alegere între două tipuri de mașini, M_1 și M_2, capabile să producă piesele necesare, aceste tipuri deosebindu-se prin numărul de piese pe care îl pot produce într-un schimb (egal cu 90 și 110 piese respectiv), precum și prin cheltuielile lunare de întreținere a lor. Cheltuielile de întreținere nu sînt proporționale cu numărul de mașini care lucrează, datorită unor condiții speciale (numărul de mecanici angajați pentru repararea lor, condiții de spațiu etc.). Astfel, cheltuielile de întreținere raportate la o mașină M_1 sînt de 5 u.b. pentru cel puțin 5 mașini de acest tip, de 7 u.b. pentru următoarele 5 mașini și de 9 u.b. pentru mașinile ce depășesc numărul de 10 mașini de tipul respectiv. În mod analog, cheltuielile de întreținere pe o mașină de tipul M_2 sînt de 8 u.b., 9 u.b. și 10 u.b. respectiv pentru primele 5 mașini, pentru următoarele 5 mașini și pentru ultima grupă de mașini de acest tip.

Să se determine un plan de achiziționare a mașinilor necesare, astfel ca ele să poată fabrica într-un schimb cel puțin 1500 piese, iar cheltuielile lunare totale de întreținere a lor să fie minime.

Rezolvare. Vom nota cu x_1, x_1', x_1'' numărul de mașini de tipul M_1 ce se vor achiziționa, respectiv, din prima grupă, a doua grupă și a treia grupă de cîte 5 mașini. Analog, notăm cu x_2, x_2' și x_2'' numărul de mașini de tipul M_2 ce se vor achiziționa, respectiv, din prima, a doua și a treia grupă de cîte 5 mașini. Cu aceste variabile, modelul matematic al problemei se scrie în modul următor:

$$[\min]\, z = 5x_1 + 7x_1' + 9x_1'' + 8x_2 + 10x_2'',$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 9x_1' + 9x_1'' + 11x_2 + 11x_2' + 11x_2'' \geqslant 150, \\ x_1 + x_1' + x_1'' + x_2 + x_2' + x_2'' \leqslant 15, \\ x_1 \leqslant 5, \qquad x_2 \leqslant 5, \\ x_1' \leqslant 5, \qquad x_2' \leqslant 5, \\ x_1'' \leqslant 5, \qquad x_2'' \leqslant 5, \end{cases}$$

$$x_j \in N^*, \qquad j = 1,2,$$

$$x_j' \in N^*, \qquad j = 1,2,$$

$$x_j'' \in N^*, \qquad j = 1,2.$$

Deoarece modelul cere un program în numere întregi, construim și rezolvăm mai întîi un model ajutător, dedus din cel de mai sus prin înlocuirea condițiilor ca variabilele să ia valori întregi prin condiții de nenegativitate. Rezolvarea acestui model ajutător se găsește în tabelul I.51. Soluția optimă a lui se extrage din secțiunea S_6 a tabelului și este următoarea:

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 5,$$

$$x_1' = 5/2, \qquad x_2' = 5/2,$$

$$x_1'' = 0; \qquad x_2'' = 0.$$

Deoarece această soluție nu are toate componentele întregi, ea nu furnizează un program optim pentru modelul inițial. Pentru aplicarea algoritmului lui

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.51

c_B	B	d	5 a_1	7 a_1'	9 a_1''	8 a_2	9 a_2'	10 a_2''	0 a_3	M a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	0 a_8	0 a_9	0 a_{10}	0 a_{11}	θ	
M	a_4	150	9	9	9	11	11	11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	150/11	
0	a_5	15	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	15	
0	a_6	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	S_0
0	a_9	5	0	0	0	**1**	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	5	
0	a_{10}	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	—	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
z_j-c_j		—	$9M-5$	$9M-7$	$9M-9$	$11M-8$	$11M-9$	$11M-10$	$-M$	0	0	0	0	0	0	0	0	—	
M	a_4	95	9	9	9	0	11	11	−1	1	0	0	0	0	−11	0	0	95/11	
0	a_5	10	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	10	
0	a_6	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	S_1
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
0	a_{10}	5	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
z_j-c_j		—	$9M-5$	$9M-7$	$9M-9$	0	$11M-9$	$11M-10$	$-M$	0	0	0	0	0	$-11M+8$	0	0	—	
M	a_4	40	9	9	9	0	0	**11**	−1	1	0	0	0	0	−11	11	0	40/11	
0	a_5	5	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	−1	−1	0	5	
0	a_6	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	S_2
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
9	a'_2	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	
z_j-c_j		—	$9M-5$	$9M-7$	$9M-9$	0	0	$11M-10$	$-M$	0	0	0	0	0	$-11M+8$	$-11M-9$	0	—	
10	a_2''	$\frac{40}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$	0	0	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	0	0	0	−1	−1	0	$\frac{40}{9}$	
0	a_5	$\frac{15}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	0	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	1	0	0	0	0	0	0	$\frac{15}{2}$	
0	a_6	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	S_3
0	a_7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
9	a'_2	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_{11}	$\frac{15}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	0	0	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	0	0	0	1	1	1	—	
z_j-c_j		—	$\frac{35}{11}$	$\frac{13}{11}$	$-\frac{9}{11}$	0	0	0	$-\frac{10}{11}$	×	0	0	0	0	−2	−1	0	—	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.51 (continuare)

C_B	B	d	5 a_1	7 a_1'	9 a_1''	8 a_2	9 a_2'	10 a_2''	0 a_3	M a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	0 a_8	0 a_9	0 a_{10}	0 a_{11}	θ	
5	a_1	$\frac{40}{9}$	1	1	1	0	0	$\frac{11}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{11}{9}$	0	—	
0	a_5	$\frac{5}{9}$	0	0	0	0	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	1	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{2}$	
0	a_6	$\frac{5}{9}$	0	−1	−1	0	0	$-\frac{11}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	1	0	0	$\frac{11}{9}$	$\boxed{\frac{11}{9}}$	0	$\frac{5}{11}$	S_4
0	a_7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
9	a_2'	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j - c_j$		—	0	−2	−4	0	0	$-\frac{35}{9}$	$-\frac{5}{9}$	×	0	0	0	0	$\frac{17}{9}$	$\frac{26}{9}$	0	—	
5	a_1	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
0	a_5	$\frac{5}{11}$	0	$\boxed{\frac{2}{11}}$	$\frac{2}{11}$	0	0	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$	0	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
0	a_{10}	$\frac{5}{11}$	0	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{9}{11}$	0	0	−1	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$\frac{9}{11}$	0	0	1	1	0	—	S_5
0	a_7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
9	a_2'	$\frac{50}{11}$	0	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$	0	1	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$-\frac{9}{11}$	0	0	−1	0	0	$\frac{50}{9}$	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j - c_j$		—	0	$\frac{22}{11}$	0	0	0	−1	$-\frac{9}{11}$	×	0	0	0	0	−1	0	0	—	
5	a_1	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	—	
7	a'_1	$\frac{5}{2}$	0	1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	−1	0	0	0	0	0	—	
0	a_{10}	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	0	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	0	0	1	1	0	—	
0	a_7	$\frac{5}{2}$	0	0	−1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	1	1	0	0	0	0	—	S_6
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	—	
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—	
9	a_2'	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0	−1	0	0	—	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	—	
$z_j - c_j$		—	0	0	−2	0	0	−1	−1	×	−2	−2	0	0	−1	0	0	—	

Scanned with OKEN Scanner

Gomory, considerăm componenta neîntreagă $x_1' = 5/2$ a soluției de mai sus și extragem restricția corespunzătoare ei din secțiunea S_6 a tabelului I.51

$$x_1' + x_2'' + 1/2\, x_3 + 11/2\, x_5 - x_6 = 5/2.$$

Conform metodei indicate la algoritmul respectiv, din această restricție se deduce o alta, ce trebuie adăugată la sistemul de restricții al modelului ajutător rezolvat mai sus. Ea are forma următoare:

$$\frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_5 \geqslant \frac{1}{2}$$

sau

$$x_3 + x_5 \geqslant 1.$$

Introducînd variabila de compensare x_{12} și schimbînd semnele, restricția se poate atașa secțiunii S_6 a tabelului I.51 după care se reiau calculele prin aplicarea algoritmului simplex-dual. Acest lucru este realizat în tabelul I.52 în care s-a obținut o soluție optimă cu toate componentele întregi, aceasta reprezentînd și programul optim al modelului inițial.

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 5,$$
$$x_1' = 2, \quad x_2' = 3, \quad z_{min} = 106.$$
$$x_1'' = 0; \quad x_2'' = 0,$$

Vor trebui achiziționate deci 7 mașini de tipul M_1 și 8 mașini de tipul M_2, ceea ce conduce la cheltuieli minime lunare de întreținere de 106 u.b.

Tabelul I.52

c_B	B	d	5 a_1	7 a_1'	9 a_1''	8 a_2	9 a_2'	10 a_2''	0 a_3	0 a_5	0 a_6	0 a_7	0 a_8	0 a_9	0 a_{10}	0 a_{11}	0 a_{12}	
5	a_1	5	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
7	a_1'	5/2	0	1	1	0	0	0	1/2	11/2	−1	0	0	0	0	0	0	
0	a_{10}	5/2	0	0	0	0	0	−1	1/2	9/2	0	0	0	1	1	0	0	
0	a_7	5/2	0	0	−1	0	0	0	−1/2	−11/2	1	1	0	0	0	0	0	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
9	a_2'	5/2	0	0	0	0	1	1	1/2	−9/2	0	0	0	−1	0	0	0	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
0	a_2	−1	0	0	0	0	0	0	**|−1|**	−1	0	0	0	0	0	0	1	
$z_j - c_j$		—	0	0	−2	0	0	−1	−1	−2	−2	0	0	−1	0	0	0	
5	a_1	5	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
7	a_1'	2	0	1	1	0	0	0	0	5	−1	0	0	0	0	0	0	
0	a_{10}	2	0	0	0	0	0	−1	0	4	0	0	0	1	1	0	0	
0	a_7	3	0	0	−1	0	0	0	0	−5	1	1	0	0	0	0	0	
0	a_8	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
8	a_2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
9	a_2'	3	0	0	0	0	1	1	0	−4	0	0	0	−1	0	0	0	
0	a_{11}	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
0	a_3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	
$z_j - c_j$		—	0	0	−2	0	0	−1	0	−1	−2	0	0	−1	0	0	0	

S_7

S_8

Scanned with OKEN Scanner

Problema 5. Două fabrici, F_1 și F_2, pot produce același produs, care este necesar în trei centre consumatoare, A_1, A_2 și A_3, în cantități egale respectiv cu 25, 40 și 60 unități. Costurile de transport pe unitatea de produs, de la fiecare fabrică la fiecare centru de consum, sînt date în tabelul I.53. Cele două

Tabelul I.53

Centrul de consum / Fabrici	A_1	A_2	A_3
F_1	4	3	5
F_2	2	4	4

fabrici nu au aceeași capacitate de producție și nici nu produc cu aceleași cheltuieli de producție, cunoscîndu-se următoarele:

1) Fabrica F_1 poate produce pînă la 20 unități din produsul respectiv, cu cheltuieli de 3 u.b. la unitate. Ea poate suplimenta producția cu încă 40 unități, făcînd anumite eforturi, ceea ce ridică costul de producție pentru cantitatea suplimentar produsă la 5 u.b. pe unitate.

2) Fabrica F_2 poate produce în mod normal pînă la 90 unități, cu cheltuieli de producție de 4 u.b. la unitate de produs. Ea poate suplimenta producția cu încă 20 unități, ceea ce ridică cheltuielile de producție pentru această cantitate la 5 u.b. pe unitate.

Să se determine un plan de producție a produsului respectiv și un plan de transport al cantităților fabricate, astfel încît cheltuielile totale, de producție și de transport, să fie minime.

Rezolvare. Notăm cu x_{11}, x_{12}, x_{13} cantitățile de produs fabricate în F_1, ce urmează să fie transportate respectiv în centrele A_1, A_2 și A_3. Notăm de asemenea cu x_{21}, x_{22} și x_{23} cantitățile de produs fabricate în F_2, ce urmează să fie transportate respectiv în A_1, A_2 și A_3. Notînd de asemenea, pentru prescurtare, cu x_1 și x_2 cantitățile totale fabricate în F_1, respectiv F_2, modelul matematic al problemei se scrie în modul următor:

$$[\min]\ z = 4x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + u_1(x_1) + u_2(x_2),$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 110, \\ x_{11} + x_{21} = 25, \\ x_{12} + x_{22} = 40, \\ x_{13} + x_{23} = 60, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,\ 2;\quad j = 1,\ 2,\ 3,$$

unde:

$$u_1(x_1) = \begin{cases} 3x_1, \text{ dacă } x_1 \in [0,\ 20], \\ 60 + 5(x_1 - 20), \text{ dacă } x_1 \in [20,\ 60], \end{cases}$$

$$u_2(x_2) = \begin{cases} 4x_1, \text{ dacă } x_2 \in [0,\ 90], \\ 360 + 5(x_2 - 90), \text{ dacă } x_2 \in [90,\ 110]. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a reduce acest model la un model liniar, vom introduce următoarele noi variabile:

y_{ij} = cantitatea de produs fabricată în F_i la costul de producție cel mai mic, ce urmează a fi transportat în centrul A_j,

y'_{ij} = cantitatea de produs fabricată în F_i la costul de producție mărit ce urmează a fi transportată în centrul A_j.

Ținînd seama de următoarele relații de legătură între variabilele folosite:

$$x_{11} = y_{11} + y'_{11},$$
$$x_{12} = y_{12} + y'_{12},$$
$$x_{13} = y_{13} + y'_{13},$$
$$x_{21} = y_{21} + y'_{21},$$
$$x_{22} = y_{22} + y'_{22},$$
$$x_{23} = y_{23} + y'_{23},$$
$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} = y_{11} + y'_{11} + y_{12} + y'_{12} + y_{13} + y'_{13},$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} = y_{21} + y'_{21} + y_{22} + y'_{22} + y_{23} + y'_{23},$$

modelul matematic de mai sus capătă forma ce urmează:

$$[\min]\, z = 7y_{11} + 9y'_{11} + 6y_{12} + 8y'_{12} + 8y_{13} + 10y'_{13} + 6y_{21} + 7y'_{21} + 8y_{22} + 9y'_{22} + 8y_{23} + 9y'_{23},$$

$$\begin{cases} y_{11} + y_{12} + y_{13} \leqslant 20, \\ y'_{11} + y'_{12} + y'_{13} \leqslant 40, \\ y_{21} + y_{22} + y_{23} \leqslant 90, \\ y'_{21} + y'_{22} + y'_{23} \leqslant 20, \\ y_{11} + y'_{11} + y_{21} + y'_{21} = 20, \\ y_{12} + y'_{12} + y_{22} + y'_{22} = 25, \\ y_{13} + y'_{13} + y_{23} + y'_{23} = 60, \end{cases}$$

$$y_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2,\ 3,$$
$$y'_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

După cum se observă, acest model este un model liniar de tip transport și vom folosi pentru rezolvare algoritmul corespunzător acestui tip de modele. Schematic, el se poate reprezenta prin matricea costurilor de transport, a cantităților necesare și a cantităților disponibile, redate în tabelul I.54. După cum se vede din acest tabel, problema nu este echilibrată, fapt ce ne determină să mai introducem un centru fictiv de consum, A_4, ce va absorbi diferența de 45 unități dintre cantitatea totală disponibilă și cantitatea total necesară (acestea vor reprezenta capacități nefolosite ale fabricilor). În acest mod, se obțin datele unei probleme echilibrate de transport, ce se găsesc în tabelul I.55. Rezolvarea

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.54

F_i \ A_j	A_1	A_2	A_3	Disp.
F_1	7	6	8	20
F_1'	9	8	10	40
F_2	6	8	8	90
F_2'	7	9	9	20
Nec.	25	40	60	170 / 125

Tabelul I.55

F_i \ A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	Disp.
F_1	7	6	8	0	20
F_1'	9	8	10	0	40
F_2	6	8	8	0	90
F_2'	7	9	9	0	20
Nec.	25	40	60	45	170

acestei probleme se găsește în tabelul I.56 din care rezultă că problema are două soluții optime de bază, notate în tabel cu X_3 și X_4. Conform soluției optime X_3, fabrica F_1 trebuie să producă 35 unități de produs, care vor pleca toate spre centrul A_2, iar fabrica F_2 va trebui să producă 90 unități, ce vor pleca astfel: 25 unități spre A_1, 5 unități spre A_2, iar 60 unități spre A_3. Conform soluției optime, X_3, fabrica F_1 trebuie să producă 40 unități, ce vor pleca toate spre A_2, iar fabrica F_2 trebuie să producă 85 unități, dintre care 25 unități vor pleca spre A_1, iar 60 unități spre A_2. După cum se știe, problema are în acest caz o infinitate de soluții optime și anume va fi soluție optimă a sa orice combinație liniară convexă a soluțiilor X_3 și X_4:

$$X = \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot x_4, \text{ cu: } \lambda \in [0; 1].$$

Problema 6. O întreprindere are un plan de desfacere a unui produs, repartizat pe cele patru trimestre ale anului în modul următor: în primele două trimestre ale anului sînt planificate cîte 200 unități, iar în ultimile două trimestre cîte 700 unități. Capacitatea de producție a întreprinderii, pentru produsul respectiv este, în condiții normale, de 300 unități pe trimestru, cheltuielile de producție fiind în aceste condiții de 5 unități bănești pe unitatea de produs. Făcînd anumite eforturi, întreprinderea poate suplimenta producția trimestrială cu încă cel mult 200 unități, cheltuielile de producție fiind însă de 8 unități bănești la unitatea de produs pentru cantitatea fabricată peste cele 300 unități inițiale.

Există posibilitatea fabricării, în timpul unui trimestru, a produsului respectiv în cantitate mai mare decît cererea și a stocării lui în vederea livrării într-unul din trimestrele următoare, ceea ce implică însă cheltuieli suplimentare (de stocare), egale cu o unitate bănească pe unitatea de produs și pe trimestru.

Să se determine un plan de producție a produsului, care să se supună condițiilor date și să conducă la cheltuieli totale de producție și de stocare minime.

Rezolvare. Vom reduce problema la o problemă de tip transport, considerînd cele patru trimestre ale anului ca patru centre consumatoare (cu necesarul respectiv de 200, 200, 700 și 700 unități), iar ca centre producătoare următoarele:

— F_1', fabrica producînd în trimestrul întîi al anului, cu cheltuieli de producție de 5 u.b. la unitatea de produs (disponibilul este de 300 unități),

— F_1'', fabrica producînd în trimestrul întîi al anului, cu cheltuieli de producție de 8 u.b. la unitatea de produs (disponibilul este de 20 unități),

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.56

X_0

				u_i \ v_j	6	8	8	0				
	$0 \leftarrow$	—	$-\ -0$									
	$\downarrow$		$\uparrow\ 20$	0	6	8	8	0	1	−2*	0	0
	15		25									
	−0	→	+0	0	6	8	8	0	3	0	2	0
25	25	40		0	6	8	8	0	0	0	0	0
		20		1	7	9	9	1	0	0	0	1

$\theta = 15$ $\qquad$ $\Delta = -2$

X_1

				u_i \ v_j	4	6	6	0				
	15		−0									
	$+\theta \leftarrow$	—	5	0	4	6	6	0	3	0	2	0
	$\downarrow$		$40\uparrow$	0	4	6	6	0	5	2	4	0
25	$25-0$	→										
		$40+\theta$		2	6	8	8	2	0	0	0	−2
		$20-\theta\downarrow$	→ 0	3	7	9	9	3	0	0	0	−3*

$\theta = 5$ $\qquad$ $\Delta = -3$

X_2

				u_i \ v_j	4	6	6	−3				
	20			0	4	6	6	−3	3	0	2	3
	$0 \leftarrow$	—	−0	3	7	9	9	0	2	−1*	1	0
	$\downarrow$	$\rightarrow +\theta$	$\uparrow$									
25	$20-0$	$\downarrow 45$		2	6	8	8	−1	0	0	0	1
		$-0\rightarrow$	$+0$									
		15	5	3	7	9	9	0	0	0	0	0

$\theta = 15$ $\qquad$ $\Delta = -1$

X_3

				u_i \ v_j	4	6	6	−2				
	20											
	$15+0$	←	−0	0	4	6	6	−2	3	0	2	2
	$\downarrow$	60	$\uparrow 25$	2	6	8	8	0	3	0	2	0
25	$5-0$	—	→ 0	2	6	8	8	0	0	0	0	0*
			20	2	6	8	8	0	1	1	1	0

$\theta = 15$ $\qquad$ $\Delta = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.56 (continuare)

X_4				$\bar{C}$					$C - \bar{C}$			
				u_i \ v_j	4	6	6	−2				
25	20 20	60	20 5 20	0 2 2 2	4 6 6 6	6 8 8 8	6 8 8 8	−2 0 0 0	3 3 0 1	0 0 0 1	2 2 0 1	2 0 0 0

— F_2', fabrica producînd în trimestrul al doilea, cu cheltuieli de producţie de 5 u.b. la unitate (cantitatea disponibilă este de 300 unităţi),
— F_2'', fabrica producînd în trimestrul al doilea, cu cheltuieli de producţie de 8 u.b. la unitate (cantitatea disponibilă este de 200 unităţi),
— F_3', F_3'', F_4', F_4'', definite analog cu cele de mai sus, corespunzînd respectiv trimestrului al treilea şi trimestrului al patrulea.

Ţinînd seama că la cheltuielile unitare de producţie mai trebuie adăugate şi cheltuielile unitare de stocare, în cazul în care produsul se vinde în alt trimestru decît este fabricat, obţinem modelul matematic al problemei, ca un model de transport, ale cărui date se găsesc în tabelul I.57. În acest tabel au rămas necompletate costurile ataşate vînzării într-un trimestru a produsului fabricat

Tabelul I.57

Trim. / F_i	I	II	III	IV	Disp.
F_1'	5	6	7	8	300
F_1''	8	9	10	11	200
F_2'		5	6	7	300
F_2''		8	9	10	200
F_3'			5	6	300
F_3''			8	9	200
F_4'				5	300
F_4''				6	200
Nec.	200	200	700	700	2000 / 1800

într-unul din trimestrele ulterioare, aceste costuri putînd fi considerate infinit de mari (situaţia corespunzătoare fiind imposibilă). Echilibrînd problema prin introducerea unui centru fictiv de consum, ce absoarbe diferenţa de 200 unităţi, problema se poate rezolva ca în tabelul I.62. Se observă în acest tabel că cele mai multe soluţii de bază folosite sînt degenerate, inclusiv soluţia optimă X_6, care, după cum se vede, nu este unică. Această soluţie optimă propune fabricarea a 300 unităţi în trimestrul întîi, în celelalte trimestre fabricîndu-se, în mod egal, cîte 500 unităţi. În acest mod, nu va fi folosită complet capacitatea întreprinderii în trimestrul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.58

X_0	$\bar{C}$						$C-\bar{C}$				
	u_i \ v_j	5	6	7	8	9					
200 100	0	5	6	7	8	3	0	0	0	0	−3
100 100 θ	3	8	9	10	11	6	0	0	0	0	−6*
−θ ← ↑											
300	−1	4	5	6	7	2		0	0	0	−2
200	2	7	8	9	10	5		0	0	0	−5
100 ↓ 200											
→	−2	3	4	5	6	1			0	0	−1
+θ −θ											
200	1	6	7	8	9	4			0	0	−4
300 ↓ 0											
+θ → −θ	−3	2	3	4	5	0				0	0
200	−3	2	3	4	5	0				1	0
θ = 0	———						Δ = −6				

X_1	$\bar{C}$						$C-\bar{C}$				
	u_i \ v_j	5	6	7	8	−3					
200 100	0	5	6	7	8	−3	0	0	0	0	3
100 100−θ 0+θ	3	8	9	10	11	0	0	0	0	0	0
← ↑											
300	−1	4	5	6	7	−4		0	0	0	4
200	2	7	8	9	10	−1		0	0	0	1
100 ↓ 200											
+θ → −θ	−2	3	4	5	6	−5			0	0	5
200	1	6	7	8	9	−2			0	0	2
↓ 300	−3	2	3	4	5	−6				0	6
→0 200	3	8	9	10	11	0				−5*	0
−θ											
θ = 100	———						Δ = −5				

X_2	$\bar{C}$						$C-\bar{C}$				
	u_i \ v_j	5	6	2	3	−3					
200 100	0	5	6	2	3	−3	0	0	5	5	3
100 100	3	8	9	5	6	0	0	0	5	5	0
−θ ← +θ											
θ ↓ 300 ↑	4	9	10	6	7	1		−5*	0	0	−1
→ −θ											
200											
200 ↓ 100	7	12	13	9	10	4		−5	0	0	−4
+θ → −θ	3	8	9	5	6	0			0	0	0
200	6	11	12	8	9	3			0	0	−3
↓ 300	2	7	8	4	5	−1				0	1
→ −θ											
100 100	3	8	9	5	6	0				0	0
+θ											
θ = 100	———						Δ = −5				

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.58 (continuare)

X_3

				$\bar{C}$					$C-\bar{C}$				
			u_i \ v_j	5	6	7	8	2					
200	100		0	5	6	7	8	2	0	0	0	0	−2
		200	−2	3	4	5	6	0	5	5	5	5	0
	100	200 −0	−1	4	5	6	7	1		0	0	0	−1
		200 → 0	2	7	8	9	10	4		0	0	0	−4*
		300 +0	−2	3	4	5	6	0			0	0	0
		200	1	6	7	8	9	3			0	0	−3
		300	−3	2	3	4	5	−1				0	1
		200 ← 0−0	−2	3	4	5	6	0				0	0
		$\theta=0$							$\Delta=-4$				

X_4

				$\bar{C}$					$C-\bar{C}$				
			u_i \ v_j	5	6	7	4	−2					
200	100		0	5	6	7	4	−2	0	0	0	4	2
		200	2	7	8	9	6	0	1	1	1	5	0
	100	200 −0	−1	4	5	6	3	−3		0	0	4	3
		200 ← +0 0	2	7	8	9	6	0		0	0	4	0
		300 0 200−0	−2	3	4	5	2	−4			0	4	4
			5	10	11	12	9	3			−4*	0	−3
		300	1	6	7	8	5	−1				0	1
		200+0 0	2	7	8	9	6	0				0	0
		$\theta=0$							$\Delta=-4$				

X_5

				$\bar{C}$					$C-\bar{C}$				
			u_i \ v_j	5	6	7	8	2					
200	100		0	5	6	7	8	2	0	0	0	0	−2
		200	−2	3	4	5	6	0	5	5	5	5	0
	100	200	−1	4	5	6	7	1		0	0	0	−1
		−0 → 0											
		200 ↑ ↓	2	7	8	9	10	4		0	0	0	−4*
		300 ← 0−0	−2	3	4	5	6	0			0	0	0
		+0											
		0 200	1	6	7	8	9	3			0	0	−3
		300	−3	2	3	4	5	−1				0	1
		200	−2	3	4	5	6	0				0	0
		$\theta=0$							$\Delta=-4$				

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.58 (continuare)

X_6				$\bar{C}$						$C - \bar{C}$				
				u_i \ v_j	5	6	7	8	−2					
200	100			0	5	6	7	8	−2	0	0	0	0	2
			200	2	7	8	9	10	0	1	1	1	1	0
	100	200		−1	4	5	6	7	−3		0	0	0	3
		200		2	7	8	9	10	0		0	0	0	0
		300		−2	3	4	5	6	4			0	0	4
		0	200	1	6	7	8	9	−1			0	0	1
			300	−3	2	3	4	5	−5				0	5
			200	−2	3	4	5	6	−4				0	4

§ 6. PROBLEME PROPUSE

1. Pentru producerea a trei tipuri de piese, P_1, P_2 și P_3, se folosește un stoc de cel mult 1200 unități dintr-o materie primă greu de obținut. Pentru fabricarea unei piese din tipul P_1 se consumă cinci unități din materia primă respectivă, iar pentru fabricarea a cîte unei piese din tipurile P_1 și P_2 se consumă respectiv cîte patru și șase unități din această materie primă. Cheltuielile de producție sînt respectiv de 4, 5 și 4 unități bănești la o piesă din tipurile P_1, P_2 și P_3, dacă se produc cel mult cîte 70 piese din fiecare tip. Dacă se depășește acest număr de piese produse, cheltuielile de producție devin respectiv de 6, 7 și 5 unități bănești la piesa din tipul respectiv, fabricată peste numărul de 70 piese. Să se determine un plan de producție care să asigure fabricarea a cel puțin 230 de piese din cele trei tipuri, cu cheltuieli totale de producție minime.

Soluție. Există două programe optime, care dau cheltuielile minime de producție de 1010 unități bănești și anume:

— cîte 70 unități din P_1 și P_2 și 90 unități din P_3,

— cîte 70 unități din P_1, 60 din P_2 și 100 din P_3.

2. Trei tipuri de substanțe, S_1, S_2 și S_3, pot fi extrase din trei tipuri de materii prime, M_1, M_2 și M_3. Cantitățile de substanțe S_1, S_2 și S_3, conținute de o unitate din fiecare materie primă, M_1, M_2 și M_3, precum și cantitățile minime necesare din cele trei substanțe sînt date în tabelul I.59. Capacitatea de prelucrare a întreprinderii este de cîte 200 unități din fiecare tip de materie primă.

Tabelul I.59

Mat. prime / Subst.	M_1	M_2	M_3	Necesar
S_1	3	5	2	1000
S_2	4	0	3	1000
S_3	0	3	5	1000

Scanned with OKEN Scanner

Cheltuielile de prelucrare pentru M_1 și M_2 sînt egale cu cîte trei unități bănești la unitatea prelucrată, iar pentru M_3 aceste cheltuieli variază după cum urmează: cîte patru unități bănești la unitatea prelucrată pînă la o cantitate maximă de 50 unități și cîte cinci unități bănești la unitatea prelucrată peste această cantitate.

Să se precizeze cîte unități să se planifice pentru a fi prelucrate din fiecare tip de materie primă, astfel încît cheltuielile totale de prelucrare să fie minime.

Soluție. Se va planifica prelucrarea a 137,5 unități din M_1, a $\frac{250}{3}$ unități din M_2 și a 150 unități din M_3, cheltuielile totale minime fiind de $3366\frac{2}{3}$ unități bănești.

3. Două fabrici F_1 și F_2 produc un anumit produs ce este necesar în centrele de consum C_1, C_2 și C_3, în cantități egale respectiv cu cîte 50 unități. Cheltuielile unitare de transport de la fabricile F_1 și F_2 la centrele de consum C_1, C_2 și C_3 sînt date în tabelul I.60.

Tabelul 1.60

F_i \ C_j	C_1	C_2	C_3
F_1	5	3	2
F_2	3	4	5

Prima fabrică are cheltuieli de producție de 4 u.b. la unitatea de produs pentru primele 70 unități și de 6 u.b. la unitatea de produs pentru următoarele 50 unități, capacitatea maximă de producție a ei fiind de 120 unități. Capacitatea maximă de producție a celei de a doua fabrici este de 90 unități, pentru primele 60 unități cheltuielile de producție fiind de 3 u.b. pe unitate de produs, iar pentru următoarele 40 unități de 5 u.b. pe unitatea produsă.

Să se determine un plan de producție și de transport al celor două fabrici astfel încît cheltuielile totale de producție și transport să fie minime.

Soluție. Problema are o infinitate de soluții, dintre care cinci sînt de bază. Iată una dintre acestea:

— fabrica F_1 va produce 90 unități, dintre care 40 pleacă spre C_2, iar 50 spre C_3.

— fabrica F_2 produce 60 unități, dintre care 50 pleacă spre C_1 și 10 spre C_2.

4. Trei fabrici, F_1, F_2 și F_3, pot produce un anumit produs necesar în centrele de consum C_1, C_2 și C_3, în cantități de 75 unități, 90 unități și 80 unități respectiv. Costurile de transport pe unitatea de produs, de la fiecare fabrică la fiecare centru de consum, sînt date în tabelul I.61. Costurile de producție pe unitatea de produs depind pentru fiecare fabrică de cantitatea produsă, după cum urmează:

— pentru fabrica F_1 sînt egale cu 4 u.b. pînă la 60 unități produse și de 6 u.b. pentru următoarele 30 unități,

Scanned with OKEN Scanner

— pentru fabrica F_2 sînt egale cu 3 u.b. pînă la 80 unităţi produse şi de 6 u.b. pentru următoarele 40 unităţi,

— pentru fabrica F_3 sînt egale cu 3 u.b. pînă la 65 unităţi produse şi de 7 u.b. pentru următoarele 35 unităţi.

Se cere un plan de producţie şi de transport al cantităţilor produse, astfel încît cheltuielile totale să fie minime.

Soluţie. Fabrica F_1 trebuie să producă 75 unităţi ce vor pleca toate spre centrul de consum C_1, fabrica F_2 trebuie să producă 80 unităţi, ce vor pleca toate spre C_2. Cheltuielile totale minime, de producţie şi transport, sînt egale cu 1415 u.b.

Tabelul 1.61

F_i \ C_j	C_1	C_2	C_3
F_1	3	4	2
F_2	5	5	2
F_3	4	1	3

5. O întreprindere are planul de desfacere a unui produs repartizat pe cele patru trimestre ale anului în modul următor: 300 unităţi în primul trimestru, 500 unităţi în cel de al doilea trimestru, 700 unităţi în cel de al treilea trimestru şi 500 unităţi în ultimul trimestru al anului. Capacitatea de producţie a întreprinderii este, în condiţii obişnuite, de 400 unităţi pe trimestru, cheltuielile de producţie fiind în acest caz de 6 u.b. la unitatea de produs. Întreprinderea poate suplimenta producţia trimestrială cu încă 200 unităţi, dar făcînd anumite eforturi ce măresc cheltuielile unitare de producţie la 10 u.b. pentru cantitatea produsă suplimentar.

Există posibilitatea stocării unor produse fabricate într-un trimestru, pentru a fi livrate în alt trimestru, caz în care se plătesc cheltuielile de stocare egale cu o unitate bănească pe unitatea de produs şi pe trimestru.

Să se determine un plan de producţie a produsului respectiv în cele patru trimestre ale anului, astfel încît cheltuielile totale, de producţie şi de stocare, să fie minime.

Soluţie. Întreprinderea trebuie să producă astfel:

— 400 unităţi în primul trimestru,

— 500 unităţi în cel de-al doilea trimestru,

— 600 unităţi în cel de-al treilea trimestru,

— 500 unităţi în ultimul trimestru al anului.

§ 7. PROBLEME DE PROGRAMARE NELINIARĂ

Într-un model de programare neliniară se cere optimul (maxim sau minim) unei funcţii neliniare, în condiţiile unui sistem de restricţii (liniare sau neliniare) şi a unor eventuale condiţii de nenegativitate. Există mulţi algoritmi care rezolvă problema în diferite cazuri particulare, dintre care vom descrie şi vom aplica doi.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul lui Beale se aplică modelelor neliniare în care se cere minimul unei funcții convexe de gradul doi, respectiv maximul unei funcții concave de gradul doi, în condițiile unui sistem de restricții liniare și a condițiilor de nenegativitate. Etapele algoritmului sînt cele ce urmează:

Etapa 0. Se determină o soluție realizabilă de bază a sistemului de restricții. Aceasta se realizează uneori printr-o simplă introducere a variabilelor de compensare, iar alteori prin introducerea unor variabile artificiale, ce sînt eliminate imediat din bază. Soluția de bază obținută împarte variabilele modelului în variabile bazice și variabile nebazice.

Etapa 1. Folosind sistemul de restricții, exprimăm variabilele bazice în funcție de cele nebazice. Cu ajutorul acestor relații, exprimăm funcția de eficiență în raport cu variabilele nebazice.

Etapa 2. Calculăm derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției de eficiență, sub forma obținută la etapa anterioară, în punctul corespunzător soluției realizabile de bază pe care o cercetăm. Dacă toate aceste derivate sînt nenegative (la problema de minim), respectiv nepozitive (la problema de maxim), algoritmul ia sfîrșit. În caz contrar, ne fixăm atenția asupra unei derivate negative (la problema de minim), respectiv pozitive (la problema de maxim), de preferință cu cel mai mare modul. Stabilind să intre în bază vectorul corespunzător variabilei în raport cu care este calculată derivata parțială fixată, trecem la etapa a treia.

Etapa 3. Scriem și rezolvăm un sistem de inecuații, care impune ca expresiile variabilelor bazice în funcție de cele nebazice să fie nenegative, considerînd în aceste expresii toate valorile variabilelor nebazice egale cu zero, cu excepția variabilei fixate la etapa anterioară. Fie K cea mai mare valoare a variabilei nebazice, al cărei vector urmează să intre în bază, ce verifică acest sistem de inecuații.

Etapa 4. Scriem și rezolvăm o inecuație, obținută impunînd ca derivata parțială a funcției de eficiență în raport cu variabila ce urmează să devină bazică — derivata calculată la etapa a doua — să fie nepozitivă (la problema de minim), respectiv nenegativă (la problema de maxim). Și în această derivată vom considera toate valorile variabilelor nebazice egale cu zero, cu excepția celei ce urmează să devină bazică. Fie cea mai mare valoare a acestei variabile, ce verifică inecuația de mai sus.

Etapa 5. În cazul cînd avem $K \leqslant L$, vom elimina din bază vectorul corespunzător variabilei bazei ce se anulează în sistemul de inecuații rezolvat la etapa a treia, dînd variabilei nebazice folosite valoarea K. În acest fel vom obține o nouă soluție realizabilă de bază, mai bună decît cea precedentă, cu care reluăm etapa întîi.

Etapa 6. În cazul cînd avem $K > L$, adăugăm sistemului de restricții o restricție suplimentară, obținută prin egalarea derivatei parțiale folosite la etapa a patra cu o variabilă nouă. Această variabilă se numește variabilă liberă și nu se mai supune condițiilor de nenegativitate. Pentru a obține o soluție realizabilă de bază mai bună decît cea precedentă, eliminăm din bază vectorul corespunzător variabilei nou introduse. Cu soluția obținută reluăm etapa întîi.

Observații

1. Etapele 1—6 se repetă de cîte ori este nevoie.
2. Dacă la o iterație oarecare, derivata parțială a funcției de eficiență în raport cu o variabilă nebazică liberă este diferită de zero, vom alege, pentru intro-

Scanned with OKEN Scanner

ducere în bază, vectorul corespunzător acestei variabile, indiferent de faptul că derivata parțială respectivă este pozitivă sau negativă. În acest fel, din sistemul de restricții, se poate renunța la o restricție.

Algoritmul secvențial se folosește cînd funcția de eficiență este neliniară, dar convexă sau concavă pe mulțimea soluțiilor realizabile. Sistemul de restricții poate avea și restricții neliniare, mulțimea definită de el fiind convexă. În acest algoritm se folosește aproximarea creșterii unei funcții neliniare prin diferențiala sa, după cum urmează:

Etapa 0. Căutăm — prin încercări — un punct oarecare al mulțimii soluțiilor realizabile.

Fie acest punct notat $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Etapa 1. Calculăm diferențiala de ordinul întîi a funcției de eficiență în punctul considerat, ea fiind o funcție liniară în creșterile variabilelor, notate cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Să notăm această funcție cu $dz_0(h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Etapa 2. Considerăm un nou punct, de forma $M_1(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n)$, astfel: cerem ca și el să verifice condițiile impuse de model, astfel:

a) Se înlocuiesc coordonatele lui în fiecare restricție liniară sau eventuală condiție de nenegativitate, aceasta devenind o nouă restricție în variabilele $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

b) Fiecare restricție neliniară se transformă într-o altă restricție în $h_1, h_2, \ldots, h_n$, aproximînd creșterea funcției neliniare din partea stîngă a ei prin diferențiala sa în punctul considerat. Astfel, dacă restricția are forma următoare:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b,$$

ea se înlocuiește prin alta, de forma:

$$g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + dg_0 \geqslant b,$$

unde dg_0 este diferențiala funcției g în punctul $M_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Etapa 3. La sistemul de restricții obținut în $h_1, h_2, \ldots, h_n$, se adaugă noi restricții, ce impun ca aceste creșteri să fie mici în valoare absolută, în raport cu celelalte date ale problemei. Aceste restricții pot fi eliminate în cazul în care problema cere maximul unei funcții convexe de gradul doi, respectiv minimul unei funcții concave de gradul doi, restricțiile fiind liniare.

Etapa 4. Rezolvăm un model ajutător de programare liniară, în care se cere maximul funcției $dz_0(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, în cazul în care modelul neliniar inițial era de maxim, respectiv de minim al acestei funcții în cazul în care modelul neliniar inițial era de minim, restricțiile fiind cele obținute la etapele doi și trei. Observăm că în acest model ajutător nu se impun condiții de nenegativitate variabilelor $h_1, h_2, \ldots, h_n$, decît în cazul în care ele apar din operațiile descrise mai sus.

Cu valorile optime obținute pentru $h_1, h_2, \ldots, h_n$, din rezolvarea modelului indicat mai sus, se determină efectiv coordonatele punctului M_1, în care valoarea funcției de eficiență este mai bună decît în punctul folosit. Cu acest punct se reia etapa întîi a algoritmului.

Etapele 1—4 se repetă de cîte ori este nevoie. Algoritmul se încheie în următoarele două cazuri:

— soluția optimă a modelului liniar ajutător de la iterația respectivă impune ca toate creșterile $h_1, h_2, \ldots, h_n$ să fie nule;

— soluția optimă a modelului liniar de la iterația respectivă indică creșteri $h_1, h_2, \ldots, h_n$ suficient de mici în valoare absolută, ca să poată fi neglijate.

Scanned with OKEN Scanner

§ 8. PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Pentru fabricarea a două tipuri de produse P_1 și P_2, se folosește o materie primă — greu de procurat — din care o întreprindere posedă o cantitate disponibilă de 700 unități. Pentru fabricarea unei unități din P_1 se consumă două unități din materia primă specificată mai sus, iar pentru fabricarea unei unități din P_2 se consumă o unitate din această materie primă. Întreprinderea are nevoie să fabrice cel puțin cîte 100 unități din fiecare tip de produs. Cercetări anterioare au estimat că, prin fabricarea a u_1 unități din P_1 și u_2 unități din P_2, cheltuielile de producție variază în funcție de aceste cantități după funcția următoare:

$$f(u_1, u_2) = 4(u_1^2 + u_2^2) - 8u_1 - 4u_2,$$

în condițiile în care se fabrică cel puțin cîte 100 unități din fiecare tip de produs.

Să se determine un plan de producție a celor două tipuri de produse, astfel încît să se fabrice în total cel puțin 300 unități, cheltuielile totale de producție fiind minime.

Rezolvare. Modelul matematic al problemei are forma următoare:

$$[\min]\ f = 4u_1^2 + 4u_2^2 - 8u_1 - 4u_2,$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 \geqslant 300, & u_1 \geqslant 100, \\ 2u_1 + 3u_2 \leqslant 700, & u_2 \geqslant 100. \end{cases}$$

Avem de rezolvat deci un model de programare pătratică cu restricții liniare, în care funcția de eficiență este convexă, ceea ce rezultă prin cercetarea matricei hessiene corespunzătoare, care este de forma:

$$H(u_1, u_2) = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Vom rezolva acest model, aplicînd algoritmul lui Beale. Mai întîi, vom reduce însă numărul restricțiilor, făcînd următoarea schimbare de variabile:

$$x_1 = u_1 - 100,$$

$$x_2 = u_2 - 100.$$

În acest fel, modelul capătă forma următoare:

$$[\min] f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 792x_1 + 796x_2 + 78\,800,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 100, & x_1 \geqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 200, & x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Introducînd variabile de compensare, cele două restricții ale modelului devin:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 200. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina o soluție de bază realizabilă inițială, introducem în prima restricție o variabilă artificială, pe care o eliminăm apoi din bază. Sistemul de restricții capătă forma următoare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 200, \end{cases}$$

vectorii corespunzători variabilelor x_5 și x_4 formînd o bază de pornire. Prin aplicarea algoritmului simplex, vectorul artificial a_5 este eliminat din bază în tabelul I.62, obținîndu-se o soluție realizabilă de bază a modelului dat,

Tabelul I.62

	B	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
	a_5	100	1	1	−1	0	1	S_0
	a_4	200	2	3	0	1	0	
	a_1	100	1	1	−1	0	1	S_1
	a_4	0	0	1	2	1	−2	

de forma:

$$x_1 = 100,$$

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Din secțiunea S_1 a tabelului I.62 extragem exprimarea variabilelor bazice (x_1 și x_4) în funcție de cele nebazice (x_2 și x_3):

$$\begin{cases} x_1 = 100 - x_2 + x_3, \\ x_4 = -x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Înlocuind în funcția de eficiență, ea capătă următoarea formă, în funcție de variabilele nebazice:

$$\varphi(x_2, x_3) = 4(100 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + 792\,(100 - x_2 + x_3) +$$

$$+ 796x_2 + 78\,800 = 8x_2^2 + 4x_3^2 - 796x_2 + 1592x_3 - 8x_2x_3 + 198\,000.$$

Derivatele parțiale de ordinul întîi ale acestei funcții sînt:

$$\varphi'_{x_2}(x_2, x_3) = 16x_2 - 796 - 8x_3,$$

$$\varphi'_{x_3}(x_2, x_3) = 12x_3 + 1592 - 8x_2.$$

Calculate pentru soluția realizabilă de bază obținută mai sus, aceste derivate parțiale devin:

$$\varphi'_{x_2}(0, 0) = -796,$$

$$\varphi'_{x_3}(0, 0) = 1\,592.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece derivata parțială în raport cu x_2, în punctul considerat, este negativă, hotărîm să introducem vectorul a_2 în bază. Pentru a determina ce vector trebuie să iasă din bază, impunem mai întîi ca expresiile lui x_1 și x_4 de mai sus să fie nenegative, considerînd în ele $x_3 = 0$:

$$100 - x_2 \geqslant 0,$$
$$-x_2 \geqslant 0.$$

Soluția acestui sistem de inecuații este:

$$x_2 \leqslant 0,$$

deci cea mai mare valoare a lui x_2 ce verifică sistemul este egală cu zero: $K = 0$. Pe de altă parte, impunem ca derivata parțială a funcției $\varphi(x_2, x_3)$ în raport cu x_2 să fie nenegativă, considerînd și în ea $x_3 = 0$:

$$16x_2 - 796 \geqslant 0.$$

Rezolvînd această inecuație, obținem: $x_2 \leqslant \frac{199}{4}$, deci cea mai mare valoare a lui x_2 ce o verifică este: $L = \frac{199}{4}$.

Deoarece avem situația: $K \leqslant L$, ne întoarcem la sistemul format din cele două inecuații de mai sus, care a condus la soluția $x_2 \leqslant 0$ și observăm că, pentru $x_2 = K = 0$, cea de a doua inecuație a sistemului devine egalitate. Înseamnă că va trebui să eliminăm din bază vectorul a_4 (cea de a doua inecuație a sistemului s-a obținut din condiția $x_4 \geqslant 0$). Înlocuirea în bază a vectorului a_4 cu vectorul a_2 este realizată în tabelul I.63. Sîntem deci în posesia unei alte soluții realizabile de bază care întîmplător coincide cu cea de la care am pornit. Variabile bazice vor fi însă x_1 și x_2 și expresiile lor în funcție de cele nebazice rezultă din secțiunea S_2 a tabelului I.63:

$$\begin{cases} x_1 = 100 + 3x_3 + x_4, \\ x_2 = \quad -2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Înlocuind în expresia funcției $\varphi(x_2, x_3)$, aceasta capătă forma următoare, în raport cu noile variabile nebazice:

$$\psi(x_3, x_4) = 8(2x_3 + x_4)^2 + 4x_3^2 + 796(2x_3 + x_4) + 1\,592x_3 + 8x_3(2x_3 + x_4) + 198\,000 = 52x_3^2 + 8x_4^2 + 40x_3x_4 + 3\,184x_3 + 796x_4 + 198\,000.$$

Tabelul I.63

B	d	a_1	a_2	a_3	a_4	
a_1	100	1	1	−1	0	S_1
a_4	0	0	[1]	2	1	
a_1	100	1	0	−3	−1	S_2
a_2	0	0	1	2	1	

Scanned with OKEN Scanner

Derivatele parțiale de ordinul întîi ale acestei funcții sînt:

$$\psi'_{x_3}(x_3, x_4) = 104x_3 + 40x_4 + 3\,184,$$

$$\psi'_{x_4}(x_3, x_4) = 16x_4 + 40x_3 + 796$$

și ele au următoarele valori pentru soluția de bază folosită:

$$\psi'_{x_3}(0, 0) = 3\,184,$$

$$\psi'_{x_4}(0, 0) = 796.$$

Deoarece ambele derivate parțiale sînt pozitive, optimul a fost atins, deci pentru modelul rezolvat soluția optimă este următoarea:

$$x_1 = 100, \qquad x_2 = 0, \qquad f_{min} = 198\,000.$$

Ținînd seama de substituția făcută, rezultă următorul program optim pentru modelul inițial:

$$u_1 = 200, \qquad u_2 = 100, \qquad f_{min} = 198\,000.$$

Întreprinderea trebuie deci să producă 200 unități din produsul P_1 și 100 unități din produsul P_2, acest plan de producție conducînd la cheltuieli totale minime de 198 000 unități bănești.

Problema 2. Pentru fabricarea a trei tipuri de produse, notate prin P_1, P_2 și P_3, se folosesc trei tipuri de materie primă, M_1, M_2 și M_3, ale căror rezerve sînt limitate. Consumurile specifice ale produselor P_1, P_2 și P_3 din cele trei tipuri de materie primă, cantitățile disponibile din aceste materii prime, precum și cheltuielile de producție la fabricarea unei unități de produs de fiecare tip, sînt date în tabelul I.64. Obținerea unui cîștig din fabricarea celor trei produse se poate realiza numai prin vinderea acestor produse într-o perioadă dată de timp. Cercetările statistice anterioare au arătat că prețurile cu care se pot vinde produsele scad în mod liniar cu cantitățile fabricate, după formulele următoare:

$$y_1 = 7 - 0{,}02\,x_1, \qquad y_2 = 8 - 0{,}01\,x_2, \qquad y_3 = 8 - 0{,}02\,x_3,$$

unde y_1, y_2 și y_3 sînt respectiv prețurile de vînzare ale celor trei tipuri de produse, iar x_1, x_2 și x_3 cantitățile corespunzătoare fabricate, cu condiția ca aceste prețuri să rămînă pozitive.

Să se determine un plan de producție a celor trei tipuri de produse, astfel încît cîștigul net total realizat să fie maxim.

Tabelul I.64

M_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	Disp.
M_1	1	2	1	200
M_2	1	1	2	200
M_3	1	1	3	240
Chelt.	5	4	2	—

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Notînd cu z cîștigul net total obținut prin fabricarea și vinderea cantităților x_1, x_2 și x_3, respectiv din produsele P_1, P_2 și P_3, expresia sa în funcție de aceste cantități se obține scăzînd din suma obținută prin vînzarea lor cheltuielile de producție:

$$z = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (5x_1 + 4x_2 + 2x_3) = x_1(7 - 0{,}02x_1) +$$
$$+ x_2(8 - 0{,}01x_2) + x_3(8 - 0{,}02x_3) - 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2x_1 + 4x_2 +$$
$$+ 6x_3 - 0{,}02x_1^2 - 0{,}01x_2^2 - 0{,}02x_3^2.$$

Pentru a nu lucra cu numere zecimale, vom considera ca funcție de eficiență o funcție de 100 de ori mai mare, pe care o vom nota cu $f(x_1, x_2, x_3)$ și care devine maximă odată cu funcția z. Ținînd seama și de consumurile de materie primă efectuate prin realizarea cantităților x_1, x_2 și x_3, modelul matematic al problemei capătă următoarea formă:

$$[\max]\ f = 200x_1 + 400x_2 + 600x_3 - 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 200, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 200, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 240, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

În plus, observăm că disponibilul de materie primă nu permite fabricarea unor cantități prea mari din cele trei tipuri de produse, astfel încît prețurile cu care se vînd produsele rămîn tot timpul strict pozitive.

Matricea hessiană atașată funcției de eficiență este următoarea:

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{Vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$$

și minorii săi principali au următoarele valori:

$$\begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} = -4 < 0; \quad \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0; \quad \begin{Vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{Vmatrix} = -32 < 0.$$

Semnele acestor minori principali arată că funcția de eficiență este o funcție concavă. Vom aplica deci algoritmul lui Beale, pentru rezolvarea modelului scris mai sus.

Într-o etapă premergătoare, introducem în cele trei restricții ale modelului variabile de compensare, ceea ce ne furnizează și o soluție realizabilă de bază inițială:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 200, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 200, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 240. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția de bază corespunzătoare este următoarea:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = 0, \\ x_4 = x_5 = 200, \\ x_6 = 240 \end{cases}$$

și ea împarte variabilele modelului în variabile bazice (x_4, x_5 și x_6) și variabile nebazice (x_1, x_2 și x_3), ceea ce permite trecerea la prima iterație a algoritmului. Vom sistematiza aplicarea acestui algoritm la rezolvarea modelului dat, pentru a scoate în evidență fiecare etapă în parte.

Iterația întîi. Într-o primă etapă, extragem expresiile variabilelor bazice din sistemul de restricții, în funcție de variabilele nebazice:

$$\begin{cases} x_4 = 200 - x_1 - 2x_2 - x_3, \\ x_5 = 200 - x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_6 = 240 - x_1 - x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

Nu este necesară înlocuirea acestor expresii în funcția de eficiență, deoarece inițial ea depinde numai de variabilele nebazice din această iterație (x_1, x_2 și x_3).

În cea de a doua etapă a iterației calculăm derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției de eficiență, în raport cu fiecare dintre cele trei variabile nebazice:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 200 - 4x_1,$$
$$f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 400 - 2x_2,$$
$$f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 600 - 6x_3.$$

Înlocuind în aceste derivate parțiale variabilele cu valorile lor date de soluția de bază obținută mai sus, avem:

$$f'_{x_1}(0, 0, 0) = 200,$$
$$f'_{x_2}(0, 0, 0) = 400,$$
$$f'_{x_3}(0, 0, 0) = 600.$$

Deoarece derivata parțială în raport cu x_3 are valoarea pozitivă cea mai mare în modul, trebuie să introducem în bază vectorul a_3.

Etapa a treia a iterației cere să rezolvăm un sistem de inecuații de forma:

$$\begin{cases} 200 - x_3 \geqslant 0, \\ 200 - 2x_3 \geqslant 0, \\ 240 - 3x_3 \geqslant 0, \end{cases}$$

obținut impunînd ca expresiile lui x_4, x_5 și x_6 să fie nenegative, variabilele x_1 și x_2 fiind considerate nule în aceste expresii. Soluția acestui sistem este următoarea:

$$x_3 \leqslant 80,$$

deci avem: $K = 80$.

Scanned with OKEN Scanner

În etapa a patra vom rezolva o inecuație obținută din condiția ca derivata parțială în raport cu x_3 să fie nenegativă, considerînd și în această derivată pe x_1 și x_2 cu valori nule. Inecuația are forma:

$$600 - 6x_3 \geqslant 0,$$

iar soluția ei este:

$$x_3 \leqslant 100.$$

Avem deci: $L = 100$.

Deoarece sîntem în cazul cînd $K < L$, cercetăm din nou sistemul de inecuații de mai sus și observăm că pentru $x_3 = K = 80$, cea de a treia inecuație a sistemului se verifică sub forma unei egalități. Vom elimina deci din bază vectorul a_6, corespunzător variabilei bazice x_6, ce se anulează pentru $x_3 = 80$. Înlocuirea din bază a vectorului a_6 cu vectorul a_3 este realizată în tabelul I.65, din care extragem o nouă soluție realizabilă de bază a modelului, mai bună decît cea de la care am pornit:

$$x_1 = x_2 = x_6 = 0, \quad x_3 = 80, \quad x_4 = 120, \quad x_5 = 40.$$

Tabelul I.65

B	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_4	200	1	2	1	1	0	0	
a_5	200	1	1	2	0	1	0	S_0
a_6	240	1	1	[3]	0	0	1	
a_4	120	2/3	5/3	0	1	0	−1/3	
a_5	40	1/3	1/3	0	0	1	−2/3	S_1
a_3	80	1/3	1/3	1	0	0	1/3	

Iterația a doua a aplicării algoritmului folosește soluția de bază obținută mai sus, soluție care fixează pe x_3, x_4 și x_5 ca variabile bazice și pe x_1, x_2 și x_6 ca variabile nebazice. În prima etapă a acestei iterații, extragem din secțiunea S_1 a tabelului I.65 expresiile variabilelor bazice în funcție de cele nebazice, sub forma:

$$x_4 = 120 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_6,$$

$$x_5 = 40 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_6,$$

$$x_3 = 80 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind expresia lui x_3 în funcţia de eficienţă, aceasta se va exprima numai în raport cu variabilele nebazice de la această iteraţie, sub forma:

$$\varphi(x_1, x_2, x_6) = 35\,200 + \frac{320}{3} x_1 + \frac{920}{3} x_2 - \frac{280}{3} x_6 - \frac{20}{9} x_1^2 - \frac{11}{9} x_2^2 - \frac{2}{9} x_6^2 - \frac{4}{9} x_1 x_2 - \frac{4}{9} x_1 x_6 - \frac{4}{9} x_2 x_6.$$

În cea de a doua etapă a acestei iteraţii, calculăm derivatele parţiale de ordinul întîi în raport cu fiecare din cele trei variabile nebazice ale funcţiei de eficienţă, sub forma determinată mai sus:

$$\varphi'_{x_1}(x_1, x_2, x_6) = \frac{320}{3} - \frac{40}{9} x_1 - \frac{4}{9} x_2 - \frac{4}{9} x_6,$$

$$\varphi'_{x_2}(x_1, x_2, x_6) = \frac{920}{3} - \frac{4}{9} x_1 - \frac{22}{9} x_2 - \frac{4}{9} x_6,$$

$$\varphi'_{x_6}(x_1, x_2, x_6) = -\frac{280}{3} - \frac{4}{9} x_1 - \frac{4}{9} x_2 - \frac{4}{9} x_6.$$

Calculate în punctul dat de soluţia de bază folosită în această iteraţie, aceste derivate parţiale au următoarele valori:

$$\varphi'_{x_1}(0, 0, 0) = \frac{320}{3}, \qquad \varphi'_{x_2}(0, 0, 0) = \frac{920}{3}, \qquad \varphi'_{x_6}(0, 0, 0) = -\frac{280}{3}.$$

Deoarece derivata parţială în raport cu x_2 are valoarea pozitivă cea mai mare în modul, hotărîm să introducem în bază vectorul a_2. Sistemul de inecuaţii ce trebuie rezolvat în etapa a treia este următorul:

$$120 - \frac{5}{3} x_2 \geqslant 0, \qquad 40 - \frac{1}{3} x_2 \geqslant 0, \qquad 80 - \frac{1}{3} x_2 \geqslant 0$$

şi soluţia lui este $x_2 \leqslant 72$, deci: $K = 72$.

Inecuaţia ce trebuie rezolvată în etapa a patra este următoarea:

$$\frac{920}{3} - \frac{22}{9} x_2 \geqslant 0$$

şi soluţia este $x_2 \leqslant \frac{1\,380}{11}$, deci: $L = \frac{1\,380}{11}$.

Deoarece avem situaţia $K < L$, eliminăm din bază vectorul a_4, expresia variabilei x_4 anulîndu-se pentru $x_2 = K = 72$. Înlocuirea în bază a vectorului a_4 cu vectorul a_2 este realizată în tabelul I.66 din care extragem o nouă soluţie realizabilă de bază mai bună decît cea anterioară:

$$x_1 = x_4 = x_6 = 0, \qquad x_3 = 56,$$
$$x_2 = 72, \qquad x_5 = 16.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.66

B	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_4	120	2/3	5/3	0	1	0	−1/3	
a_5	40	1/3	1/3	0	0	1	−2/3	S_1
a_3	80	1/3	1/3	1	0	0	1/3	
a_2	72	2/5	1	0	3/5	0	−1/5	
a_5	16	1/5	0	0	−1/5	1	−3/5	S_2
a_3	56	1/5	0	1	−1/5	0	2/5	

Iteraţia a treia începe cu prima etapă a sa, în care exprimăm cu ajutorul secţiunii S_2 a tabelului I.66 variabilele bazice în raport cu variabilele nebazice:

$$\begin{cases} x_2 = 72 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_6, \\ x_5 = 16 - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_6, \\ x_3 = 56 - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_6. \end{cases}$$

Înlocuind expresia lui x_2 în funcţia de eficienţă, sub forma ei anterioară, obţinem exprimarea acestei funcţii în variabilele nebazice ale acestei iteraţii:

$$\psi(x_1, x_4, x_6) = 50\,944 + \frac{112}{5}x_1 - \frac{392}{5}x_4 - \frac{496}{5}x_6 - \frac{56}{25}x_1^2 - \frac{11}{25}x_4^2 - \frac{9}{25}x_6^2 - \frac{8}{25}x_1x_4 - \frac{4}{25}x_1x_6 + \frac{14}{25}x_4x_6.$$

În cea de a doua etapă a iteraţiei, calculăm derivatele parţiale de ordinul întîi ale acestei funcţii, în raport cu fiecare dintre cele trei variabile nebazice:

$$\psi'_{x_1}(x_1, x_4, x_6) = \frac{112}{5} - \frac{112}{25}x_1 - \frac{8}{25}x_4 - \frac{4}{25}x_6,$$

$$\psi'_{x_4}(x_1, x_4, x_6) = -\frac{392}{5} - \frac{8}{25}x_1 - \frac{22}{25}x_4 + \frac{14}{25}x_6,$$

$$\psi'_{x_6}(x_1, x_4, x_6) = -\frac{496}{5} - \frac{4}{25}x_1 + \frac{14}{25}x_4 - \frac{18}{25}x_6.$$

Pentru soluţia de bază folosită, aceste derivate parţiale devin:

$$\psi'_{x_1}(0, 0, 0) = \frac{112}{5}, \qquad \psi'_{x_4}(0, 0, 0) = -\frac{392}{5}, \qquad \psi'_{x_6}(0, 0, 0) = -\frac{496}{5}.$$

Deoarece derivata parţială în raport cu x_1 este strict pozitivă, decidem să introducem în bază vectorul a_1.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul de inecuaţii ce trebuie rezolvat în etapa a treia este următorul:

$$72 - \frac{2}{5} x_1 \geqslant 0, \qquad 16 - \frac{1}{5} x_1 \geqslant 0, \qquad 56 - \frac{1}{5} x_1 \geqslant 0,$$

iar soluţia lui este $x_1 \leqslant 80$. Prin urmare avem: $K = 80$.

Inecuaţia ce trebuie rezolvată în etapa a patra este următoarea:

$$\frac{112}{5} - \frac{112}{25} x_1 \geqslant 0,$$

iar soluţia este $x_1 \leqslant 5$. Prin urmare avem: $L = 5$.

Deoarece sîntem în situaţia $K > L$, trecem direct la etapa a şasea şi adăugăm sistemului de restricţii o restricţie suplimentară, de forma:

$\frac{5}{4} \psi'_{x_1}(x_1, x_4, x_6) = 28 - \frac{28}{5} x_1 - \frac{2}{5} x_4 - \frac{1}{5} x_6 = x_7$, care poate fi scrisă astfel:

$$\frac{28}{5} x_1 + \frac{2}{5} x_4 + \frac{1}{5} x_6 + x_7 = 28.$$

Restricţia suplimentară poate fi introdusă direct în secţiunea S_2 a tabelului I.66, urmînd să fie eliminat din bază vectorul a_7, corespunzător variabilei nou introduse. Înlocuirea din bază a vectorului a_7 prin vectorul a_1 este realizată în tabelul I.67 care ne furnizează o soluţie realizabilă de bază (a modelului lărgit), mai bună decît cea folosită în această iteraţie. Această soluţie este următoarea:

$$x_4 = x_6 = x_7 = 0, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 70, \quad x_3 = 55, \quad x_5 = 15.$$

Tabelul I.67

B	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
a_2	72	2/5	1	0	3/5	0	−1/5	0	
a_5	16	1/5	0	0	−1/5	1	−3/5	0	
a_3	56	1/5	0	1	−1/5	0	2/5	0	S'_2
a_7	28	28/5	0	0	2/5	0	1/5	1	
a_2	70	0	1	0	4/7	0	−3/14	−1/14	
a_5	15	0	0	0	−3/14	1	−17/28	−1/28	
a_3	55	0	0	1	−3/14	0	11/28	−1/28	S_3
a_1	5	1	0	0	1/14	0	1/28	5/28	

Iteraţia a patra. Din secţiunea S_3 a tabelului I.67 exprimăm variabilele bazice în raport cu cele nebazice:

$$\begin{cases} x_2 = 70 - \frac{4}{7} x_4 + \frac{3}{14} x_6 + \frac{1}{14} x_7, \\ x_5 = 15 + \frac{3}{14} x_4 + \frac{17}{28} x_6 + \frac{1}{28} x_7, \\ x_3 = 55 + \frac{3}{14} x_4 - \frac{11}{28} x_6 + \frac{1}{28} x_7, \\ x_1 = 5 - \frac{1}{14} x_4 - \frac{1}{28} x_6 - \frac{5}{28} x_7. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind expresia lui x_1 în funcția de eficiență sub ultima ei formă, obținem această funcție exprimată numai prin variabilele nebazice de la această iterație:

$$\xi(x_4, x_6, x_7) = 51\,000 - 80\,x_4 - 100\,x_6 - \frac{3}{7}\,x_4^2 - \frac{5}{14}\,x_6^2 - \frac{1}{14}\,x_7^2 + \frac{4}{7}\,x_4x_6.$$

Derivatele parțiale de ordinul întîi ale acestei funcții, în raport cu cele trei variabile nebazice, sînt următoarele:

$$\xi'_{x_4}(x_4, x_6, x_7) = -80 - \frac{6}{7}\,x_4 + \frac{4}{7}\,x_6,$$

$$\xi'_{x_6}(x_4, x_6, x_7) = -100 + \frac{4}{7}\,x_4 - \frac{5}{7}\,x_6,$$

$$\xi'_{x_7}(x_4, x_6, x_7) = -\frac{1}{7}\,x_7.$$

Calculate în punctul dat de soluția de bază corespunzătoare acestei iterații, cele trei derivate parțiale devin:

$$\xi'_{x_4}(0, 0, 0) = -80,$$

$$\xi'_{x_6}(0, 0, 0) = -100,$$

$$\xi'_{x_7}(0, 0, 0) = 0.$$

Deoarece derivata parțială în raport cu variabila liberă x_7 este nulă, iar derivatele parțiale în raport cu celelalte variabile sînt strict negative, valoarea maximă a funcției de eficiență a fost atinsă, programul optim al modelului fiind dat de soluția realizabilă de bază folosită în această iterație.

Întreprinderea trebuie să planifice deci fabricarea a 5 unități din P_1, 70 unități din P_2 și 55 unități din P_3, realizînd un cîștig net total maxim de 51 000 unități bănești. În acest fel, rămîn nefolosite numai 15 unități din materia primă M_2.

Problema 3. La fabricarea unui anumit tip de materiale de construcție, se pot adăuga și două substanțe, S_1 și S_2, care măresc rezistența materialului. Notînd cu x_1 și x_2 cantitățile folosite la tona de material, respectiv din S_1 și S_2, aceasta va fi în limite normale dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 5,$$

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 20.$$

Eficiența adăugării celor două substanțe depinde de cantitățile adăugate, măsurîndu-se prin valoarea unei funcții de forma:

$$f = x_1^2 + 2\,x_2^2 - x_1.$$

Să se determine cantitățile din substanțele S_1 și S_2 ce trebuie adăugate la tona de material, astfel încît acesta să fie în limite normale, iar rezistența lui să fie maximă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Modelul matematic al problemei este următorul:

$$[\max]\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1,$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 5,$$
$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 20,$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1,2.$$

Matricea hessiană, corespunzătoare funcției de eficiență, este:

$$H(x_1, x_2) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

și ea indică convexitatea funcției. Fiind deci nevoie de găsit maximul unei funcții convexe, vom aplica algoritmul secvențial. Fie punctul $M_0(3; 1)$, ale cărui coordonate verifică restricțiile modelului și condițiile de nenegativitate, punct în care valoarea funcției este:

$$f(3; 1) = 10.$$

Într-o primă iterație, pornim de la acest punct, în care vom aproxima creșterea funcției cu diferențiala sa:

$$\Delta f_0 \approx df_0 = f'_{x_1}(3; 1)\ h_1 + f'_{x_2}(3; 1)\ h_2 = 5h_1 + 4h_2.$$

Să notăm această funcție în h_1 și h_2 prin z:

$$z = 5h_1 + 4h_2.$$

Deoarece noul punct, în care se ajunge cu această creștere, este de forma $M_1(3 + h_1; 1 + h_2)$, vom verifica restricțiile modelului, precum și condițiile de nenegativitate cu coordonatele lui, impunînd astfel ca aceste coordonate să reprezinte de asemenea o soluție realizabilă a modelului. Se ajunge deci la următorul model ajutător de programare liniară:

$$[\max]\ z = 5h_1 + 4h_2,$$
$$(3 + h_1) + 2(1 + h_2) \leqslant 5,$$
$$3(3 + h_1) + 5(1 + h_2) \leqslant 20,$$
$$3 + h_1 \geqslant 0,$$
$$1 + h_2 \geqslant 0,$$

sau:

$$[\max]\ z = 5h_1 + 4h_2,$$
$$\begin{cases} h_1 + 2h_2 \leqslant 0, \\ 3h_1 + 5h_2 \leqslant 6, \\ -h_1 \leqslant 3, \\ -h_2 \leqslant 1, \end{cases}$$
$$h_1,\ h_2 \text{ oarecare.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece variabilele h_1 și h_2 ale acestui model nu se supun condițiilor de nenegativitate, vom introduce alte patru variabile în locul lor, care se supun condițiilor de nenegativitate și care se definesc prin relațiile:

$$h_1 = h_1' - h_1'',$$
$$h_2 = h_2' - h_2''.$$

După aceste substituții, modelul capătă următoarea formă:

$$[\max]\ z = 5h_1' - 5h_1'' + 4h_2' - 4h_2'',$$
$$\begin{cases} h_1' - h_1'' + 2h_2' - 2h_2'' \leqslant 0, \\ 3h_1' - 3h_1'' + 5h_2' - 5h_2'' \leqslant 6, \\ -h_1' + h_1'' \leqslant 3, \\ -h_2' + h_2'' \leqslant 1, \end{cases}$$
$$h_j' \geqslant 0, \quad j = 1,2.$$
$$h_j'' \geqslant 0, \quad j = 1,2.$$

Acest model este rezolvat în tabelul I.68 din care se extrage soluția optimă a sa, care este de forma următoare:

$$h_1' = 2,\ h_1'' = 0,$$
$$h_2' = 0,\ h_2'' = 1.$$

Tabelul I.68

C_B	B	d	5 a_1'	−5 a_1''	4 a_2'	−4 a_2''	0 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	θ	
0	a_3	0	[1]	−1	2	−2	1	0	0	0	0	
0	a_4	6	3	−3	5	−5	0	1	0	0	2	S_0
0	a_5	3	−1	1	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_6	1	0	0	−1	1	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	5	−5	4	−4	0	0	0	0	—	
5	a_1	0	1	−1	2	−2	1	1	0	0	—	
0	a_4	6	0	0	−1	1	−3	0	1	0	6	
0	a_5	3	0	0	2	−2	1	0	0	0	—	S_1
0	a_6	1	0	0	−1	[1]	0	0	0	1	1	
$c_j - z_j$		—	0	0	−6	6	−5	0	0	0	—	
5	a_1	2	1	−1	0	0	1	0	0	2		
0	a_4	5	0	0	0	0	−3	1	0	−1		
0	a_5	5	0	0	0	0	1	0	1	2		S_2
−4	a_2''	1	0	0	−1	1	0	0	0	1		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	−5	0	0	−6		

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea deci:

$$h_1 = h_1' - h_1'' = 2 - 0 = 2,$$
$$h_2 = h_2' - h_2'' = 0 - 1 = -1.$$

În acest fel, coordonatele punctului M_1 devin:

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 0,$$

aceasta reprezentînd o soluție realizabilă mai bună decît cea folosită, a modelului inițial. Luînd în considerație această soluție, trecem la iterația a doua, considerînd un alt punct, $M_2(5 + h_1, 0 + h_2)$.

Creșterea funcției de eficiență va fi aproximată prin:

$$\Delta f_1 \approx df_1 = f'_{x_1}(5, 0) \cdot h_1 + f'_{x_2}(5, 0) \cdot h_2 = 9h_1.$$

Impunînd coordonatelor punctului M_2 să verifice restricțiile modelului dat și condițiile de nenegativitate, se obține următorul model ajutător de programare liniară:

$$[\max]\ v = 9h_1,$$
$$h_1 + 2h_2 \leqslant 0,$$
$$3h_1 + 5h_2 \leqslant 5,$$
$$-h_1 \leqslant 5,$$
$$h_2 \geqslant 0,$$
$$h_1 \text{ oarecare.}$$

Deoarece variabila h_1 nu verifică condiția de nenegativitate, vom introduce în locul ei alte două variabile, h_1' și h_1'', definite prin:

$$h_1 = h_1' - h_1''.$$

În acest mod, modelul ajutător capătă următoarea formă:

$$[\max]\ v = 9h_1' - 9h_1'',$$
$$h_1' - h_1'' + 2h_2 \leqslant 0,$$
$$3h_1' - 3h_1'' + 5h_2 \leqslant 5,$$
$$-h_1' + h_1'' \leqslant 5,$$
$$h_1' \geqslant 0,\ h_1'' \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0.$$

Rezolvarea acestui model este făcută în tabelul I.69 din care rezultă următoarea soluție optimă:

$$h_1' = 0,\ h_1'' = 0,\ h_2 = 0.$$

Avem deci: $h_1 = h_2 = 0$, deci algoritmul ia sfîrșit, programul optim al modelului inițial fiind dat de valorile:

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 0.$$

Vor trebui deci adăugate numai cinci unități din substanța S_1 la tona de material.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.69

C_B	B	d	9	−9	0	0	0	0	0	
			a_1'	a_1''	a_2	a_3	a_4	a_5		
0	a_3	0	1	−1	2	1	0	0	0	
0	a_4	5	3	−3	5	0	1	0	5/3	S_0'
0	a_5	5	−1	1	0	0	0	1	—	
$c_j - v_j$		—	9	−9	0	0	0	0	—	
9	a_1'	0	1	−1	2	1	0	0		
0	a_4	5	0	0	−1	−3	1	0		S_1'
0	a_5	5	0	0	2	1	0	1		
$c_j - v_j$		—	0	0	−18	−9	0	0	—	

Problema 4. Pentru anumite nevoi interne ale unei secții, trebuie construite două piese sub formă de cuburi, dintr-un material existent în cantitate suficient de mare în secție. Costul fabricării fiecărui cub este proporțional cu muchia cubului și de două ori mai mare pentru cubul mic decît pentru cubul mare.

Să se determine muchiile celor două cuburi, astfel încît aria lor totală să fie maximă, lungimile muchiilor lor să nu difere mai mult decît cu 4 cm, iar costul total de fabricare să nu depășească 10 u.b., considerînd costul de o unitate bănească pe centimetru de muchie la cubul mare.

Rezolvare. Notînd cu x_1 muchia cubului mare și cu x_2 muchia cubului mic, aria totală a celor două cuburi este egală cu:

$$S = 6x_1^2 + 6x_2^2.$$

Putem considera ca funcție de eficiență a șasea parte din această arie, astfel încît modelul matematic al problemei are forma următoare:

$$[\max]\, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10, \\ x_1 - x_2 \leqslant 4, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2.$$

Funcția de eficiență se dovedește a fi o funcție convexă. Vom începe aplicarea algoritmului secvențial, pornind de la punctul $M_0(1;1)$, în care valoarea funcției de eficiență este:

$$f(1;1) = 2.$$

Creșterea funcției se aproximează prin:

$$\Delta f_0 \approx \mathrm{d}f_0 = f_{x_1}'(1;1) \cdot h_1 + f_{x_2}'(1;1) \cdot h_2 = 2h_1 + 2h_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Impunînd coordonatelor punctului $M_1\,(1+h_1;\,1+h_2)$ să verifice restricţiile problemei şi condiţiile de nenegativitate, obţinem următorul model ajutător de programare liniară:

$$[\max]\, z = 2h_1 + 2h_2,$$
$$h_1 + 2h_2 \leqslant 7,$$
$$h_1 - h_2 \leqslant 4,$$
$$-h \leqslant 1,$$
$$-h_2 \leqslant 1,$$
$$h_1, h_2 \text{ oarecare.}$$

Punem:

$$h_1 = h_1' - h_1'',\ h_1' \geqslant 0,\ h_2' \geqslant 0,$$
$$h_2 = h_2' - h_2'',\ h_2' \geqslant 0,\ h_2'' \geqslant 0$$

şi modelul ajutător devine:

$$[\max]\, z = 2h_1' - 2h_1'' + 2h_2' - 2h_2'',$$
$$\begin{cases} h_1' - h_1'' + 2h_2' - 2h_2'' \leqslant 7, \\ h_1' - h_1'' - h_2' + h_2'' \leqslant 4, \\ -h_1' + h_1'' \leqslant 1, \\ -h_2' + h_2'' \leqslant 1, \end{cases}$$
$$h_j' \geqslant 0,\quad j = 1,2.$$

Rezolvarea acestui model este făcută în tabelul I.70 din care extragem următoarea soluţie optimă:

$$h_1' = 5,\ h_1'' = 0,$$
$$h_2' = 1,\ h_2'' = 0.$$

Avem deci:

$$h_1 = h_1' - h_1'' = 5 - 0 = 5,$$
$$h_2 = h_2' - h_2'' = 1 - 0 = 1,$$

deci coordonatele punctului M_1 sînt următoarele:

$$x_1 = 1 + h_1 = 6,$$
$$x_2 = 1 + h_2 = 2.$$

Pornind de la punctul $M_1(6,\,2)$, trecem la punctul $M_2\,(6+h_1,\ 2+h_2)$, creşterea funcţiei fiind aproximată prin:

$$\Delta f_1 \approx df_1 = f_{x_1}'(6,\,2)\cdot h_1 + f_{x_2}'(6,\,2)\cdot h_2 = 12\,h_1 + 4h_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul I.70

C_B	B	d	2 a_1'	−2 a_1''	2 a_2'	−2 a_2''	0 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	θ	
0	a_3	7	1	−1	2	−2	1	0	0	0	7	
0	a_4	4	[1]	−1	−1	1	0	1	0	0	4	S_0
0	a_5	1	−1	1	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_6	1	0	0	−1	1	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	2	−2	2	−2	0	0	0	0	—	
0	a_3	3	0	0	[3]	−3	1	−1	0	0	1	
2	a_1'	4	1	−1	−1	1	0	1	0	0	—	S_1
0	a_5	5	0	0	−1	1	0	1	1	0	—	
0	a_6	1	0	0	−1	1	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	0	0	4	−4	0	−2	0	0	—	
2	a_2'	1	0	0	1	−1	1/3	−1/3	0	0		
2	a_1'	5	1	−1	0	0	1/3	2/3	0	0		
0	a_5	6	0	0	0	0	1/3	2/3	1	0		S_2
0	a_6	2	0	0	0	0	1/3	−1/3	0	1		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	−4/3	−2/3	0	0	—	

Impunînd coordonatelor lui M_2 să verifice restricţiile modelului iniţial şi condiţiile de nenegativitate, obţinem un nou model ajutător de programare liniară şi anume:

$$[\max]\, v = 12h_1 + 4h_2,$$

$$\begin{cases} h_1 + 2h_2 \leqslant 0, \\ h_1 - h_2 \leqslant 0, \\ -h_1 \leqslant 6, \\ -h_2 \leqslant 2, \end{cases}$$

h_1, h_2 oarecare.

Punînd de asemenea:

$$h_1 = h_1' - h_1'',\ h_1' \geqslant 0,\ h_1'' \geqslant 0,$$

$$h_2 = h_2' - h_2'',\ h_2' \geqslant 0,\ h_2'' \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

modelul ajutător capătă forma următoare:

$$[\max]\ v = 12h_1' - 12h_1'' + 4h_2' - 4h_2'',$$

$$\begin{cases} h_1' - h_1'' + 2h_2' - 2h_2'' \leqslant 0, \\ h_1' - h_1'' - h_2' + h_2'' \leqslant 0, \\ -h_1' + h_1'' \leqslant 6, \\ -h_2' + h_2'' \leqslant 2. \end{cases}$$

$$h_j' \geqslant 0, \quad j = 1,2,$$

$$h_j'' \geqslant 0, \quad j = 1,2.$$

Rezolvarea acestui model este făcută în tabelul I.71 din care se extrage soluţia optimă, de forma:

$$h_1' = h_1'' = 0, \qquad h_2' = h_2'' = 0.$$

Avem deci: $h_1 = h_2 = 0$ şi algoritmul ia sfîrşit, programul optim al modelului iniţial fiind dat de valorile:

$$x_1 = 6, \qquad x_2 = 2.$$

Tabelul I.71

C_B	B	d	12 a_1'	−12 a_1''	4 a_2'	−4 a_2''	0 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0	
0	a_3	0	[1]	−1	2	−2	1	0	0	0	0	
0	a_4	0	1	−1	−1	1	0	1	0	0	0	S_0'
0	a_5	6	−1	1	0	0	0	0	1	0	—	
0	a_6	2	0	0	−1	1	0	0	0	1	—	
$c_j - z_j$		—	12	−12	4	−4	0	0	0	0	—	
12	a_1'	0	1	−1	2	−2	1	0	0	0	—	
0	a_4	0	0	0	−3	[3]	−1	1	0	0	0	S_1'
0	a_5	6	0	0	2	−2	1	0	1	0	—	
0	a_6	2	0	0	−1	1	0	0	0	1	2	
$c_j - z_j$		—	0	0	−20	20	−12	0	0	0	—	
12	a_1'	0	1	−1	0	0	1/3	2/3	0	0		
−4	a_2''	0	0	0	−1	1	−1/3	1/3	0	0		S_2'
0	a_4	6	0	0	0	0	1/3	2/3	1	0		
0	a_6	2	0	0	0	0	1/3	−1/3	0	1		
$c_j - z_j$		—	0	0	0	0	−8/3	−20/3	0	0	—	

Scanned with OKEN Scanner

Cele două cuburi ce trebuie fabricate vor avea deci muchiile respectiv de 6 cm și 2 cm, aria totală a lor fiind maximă și egală cu:

$$S = 240 \text{ cm}^2.$$

O b s e r v a ț i e . Modelul dat putea fi rezolvat ușor și printr-o metodă geometrică. Astfel, sistemul de restricții și condițiile de nenegativitate determină în planul $x_1 O x_2$ patrulaterul $OABC$ din figura I.9, coordonatele oricărui punct din acest patrulater reprezentînd cîte o soluție realizabilă. Pe de altă parte, toate punctele ale căror coordonate conduc la o valoare constantă a funcției de eficiență se găsesc pe un cerc cu centrul în originea axelor, valoarea funcției de

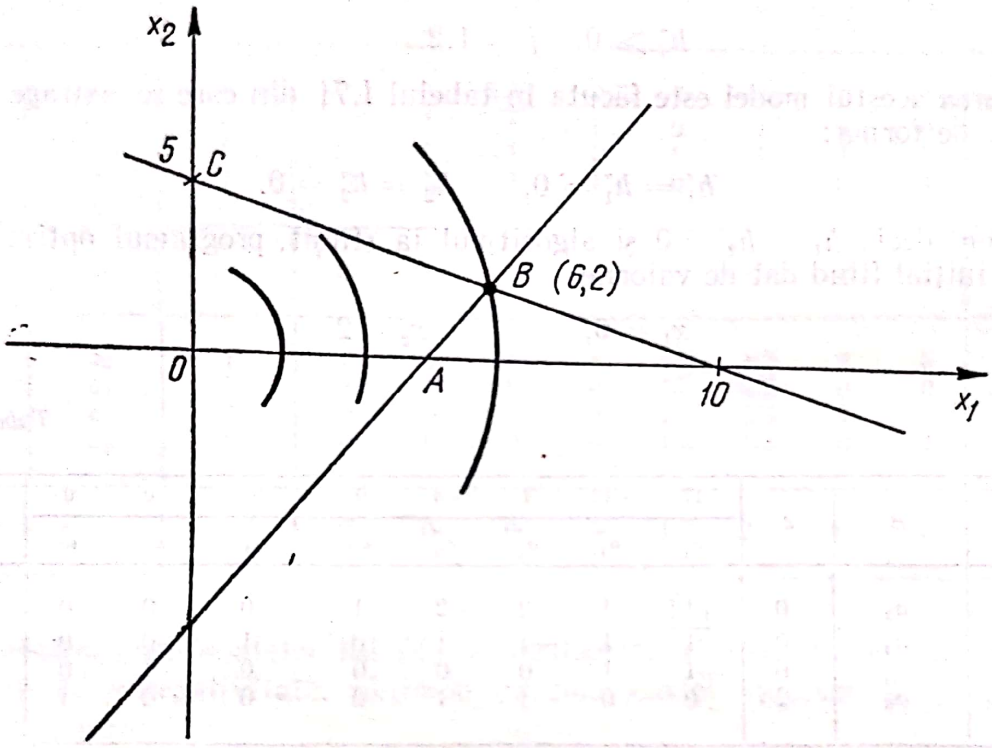


Fig. I.9

eficiență fiind egală cu pătratul razei. Căutăm deci un cerc de acest fel cu raza cît mai mare, care să aibă cel puțin un punct comun cu patrulaterul $OABC$. Acest cerc este cel reprezentat în figura I.9 avînd raza OB, iar singurul punct comun al său cu patrulaterul este punctul B, ale cărui coordonate vor reprezenta deci programul optim al modelului. Coordonatele punctului B se obțin prin intersecția celor două drepte ce îl determină și se dovedesc a fi egale cu valorile precizate mai sus.

§ 9. PROBLEME PROPUSE

1. Pentru fabricarea a trei tipuri de produse, P_1, P_2 și P_3, se folosesc materii prime de tipurile M_1 și M_2. Consumurile specifice ale acestor produse în cele două tipuri de materie primă, cantitățile disponibile din aceste materii prime și cheltuielile de producție la fabricarea unei cantități de produs de fiecare tip sînt date în tabelul I.72. Cercetările statistice anterioare au arătat că prețurile

Scanned with OKEN Scanner

cu care se pot vinde produsele scad în mod liniar cu cantităţile fabricate, după formulele următoare:

$$y_1 = 6 - 0{,}003\ x_1,$$
$$y_2 = 7 - 0{,}004\ x_2,$$
$$y_3 = 8 - 0{,}001\ x_3,$$

Tabelul 1.72

M_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	Disp.
M_1	5	5	7	200
M_2	2	3	5	150
Chelt.	4	5	7	—

unde y_1, y_2 şi y_3 reprezintă preţurile de vînzare, iar x_1, x_2 şi x_3 cantităţile fabricate.

Să se determine un plan de producţie care să conducă la un cîştig net total maxim.

Soluţie. Se vor fabrica numai $\frac{50}{3}$ unităţi din produsul P_3, cîştigul net total maxim fiind de $\frac{160\,000}{3}$ unităţi băneşti.

2. La fabricarea unui produs se pot folosi în mod suplimentar două substanţe, S_1 şi S_2, care dau produsului calităţi deosebite. Notînd cu x_1 şi x_2 cantităţile din aceste substanţe, ce se folosesc la fabricarea unei unităţi de produs, eficacitatea adăugării lor se măsoară printr-o caracteristică numerică z, ce depinde de cantităţile folosite după următoarea formulă:

$$z = 5\,x_1 + 12\ x_2 - x_1^2 - x_2^2.$$

Să se determine ce cantităţi din S_1 şi S_2 trebuie folosite la unitatea de produs, astfel încît cantitatea totală din aceste substanţe să nu depăşească cinci unităţi, cantitatea din S_1 folosită să nu depăşească pe cea din S_2 cu mai mult de trei unităţi, iar caracteristica z să fie maximă.

Soluţie. Se vor folosi $x_1 = 0{,}75$ unităţi din S_1 şi $x_2 = 4{,}25$ unităţi din S_2, caracteristica avînd astfel valoarea maximă egală cu 36,125.

3. Pentru fabricarea a două produse, P_1 şi P_2, se foloseşte o resursă disponibilă în cantitate limitată, de 52 unităţi. La unitatea de produs P_1 fabricată se consumă două unităţi din resursa respectivă, iar la unitatea de produs P_2 fabricată se consumă o unitate din această resursă. Produsele fabricate sînt folosite în cadrul aceleiaşi întreprinderi, înlocuind anumite produse de import, astfel încît prin folosirea lor se face o economie. S-a estimat economia adusă prin folosirea a x_1 unităţi din P_1 şi x_2 unităţi din P_2, produse chiar în cadrul întreprinderii, prin funcţia:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Să se determine un plan de producţie pentru produsele P_1 şi P_2, astfel încît să se obţină o economie cît mai mare, ştiind că pentru fiecare din aceste produse capacitatea maximă de producţie este de 20 unităţi.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Se vor produce 16 unități din P_1 și 20 unități din P_2, ceea ce conduce la o economie maximă de 656 u.b.

4. Trebuie construite două recipiente cilindrice, cu secțiunea axială pătrată, astfel încît bazele lor să încapă pe o platformă lungă de 400 cm. Diferența razelor acestor două recipiente nu trebuie să fie mai mare de 50 cm.

Să se determine razele celor două recipiente, astfel încît capacitatea lor totală să fie maximă.

Soluție. Cele două recipiente trebuie să aibă razele respectiv de 125 cm și 75 cm.

5. Să se determine razele a două recipiente, astfel încît volumul lor total să fie maxim, dacă suma razelor lor nu depășește 150 cm, iar suma ariilor bazelor nu depășește 62 800 cm^2.

Soluție. Este convenabil să se construiască un singur recipient, cu raza aproximativ de 141,4 cm.

BIBLIOGRAFIE

1. ARROW K. J., HURWIEZ L. and UZUWA H., „*Studies in Linear and Nonlinear Programming*", — Stanford Univ. Press, 1958.
2. ABADIE, A., *Nonlinear Programming* — Wiley, 1967.
3. BEALE, E. M., „*On Quadratic Programming*" *in Naval Research Logistic Quarterly*, vol. 6, 1959.
4. BOOT C. G. „*Quadratic Programming Algorithms*" — North Holland Publishing Co. 1964.
5. FIACCO A. V., and McCORMICK, G. P., „*Programming Under Nonlinear Constraints by Unconstrained Minimization*: A primal-Dual Method" — Tech. Paper RACTP-96, Res. Analysis Corp., McClean, Va., Spet. 1963.
6. GLASS H. and COOPER L., „*Sequential Search*: *A Method for Solving Constrained Optimization Problems*" — Jr. Assoc. for Computing Machinery, Jan., 1963.
7. MIHOC GH., NĂDEJDE I., „*Programarea matematică*" — vol. I, Ed. științifică, 1966.
8. GOMORY R. E., „*An Algorithm for the Mixed Integer Problem*", The RAND Corp., R, M. 2597, 1960.
9. HADLEY G., „*Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.
10. BRACKEN J. and McCORMICK J. P., „*Selected Applications of Nonlinear Programming*, Wiley, 1968.
11. KELLEY J. E. Jr., „*The cutting Plane Method for Solving Complex Programs*", Jr. Soc. Ind. Appl. Math. vol. 9, no. 4., Dec. 1961.
12. LAND A. H. and DOIG A., „*An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*", Econometrica, 28(497—520), 1960.
13. DRAGOMIRESCU M. și MALIȚA M., „*Programarea Matematică*", Ed. științifică, 1968.
14. SAATY, THOMAS L. and BRAM J., „*Nonlinear Mathematics*" McGrow, 1964, pp 133—141.
15. VAJDA S., „*Mathematical Programming*", Addison Wesley, 1961.
16. ZUJHOVISKIY and ANDREEVNA D., „*Linear and Convex Programming*" W. B. Saunders, 1968.
17. VĂDUVA I., DINESCU C., SĂVULESCU B., „*Modele matematice pentru organizarea și conducerea producției*", Ed. didactică și pedagogică, vol. II, partea a 2-a, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

PROBLEME CARE FOLOSESC TEHNICI SPECIFICE TEORIEI REȚELELOR

§ 1. PROBLEME CARE FOLOSESC ALGORITMI AI DRUMURILOR OPTIMALE

Multe dintre problemele întîlnite în practica economică se pot rezolva cu ajutorul tehnicilor specifice teoriei grafelor sau rețelelor.

O problemă cu mari implicații practice este cea a determinării drumului (drumurilor) de valoare optimă (minimă sau maximă) dintre două vîrfuri ale unei rețele. Pentru rezolvarea acestei probleme s-au construit mulți algoritmi de calcul. Dintre aceștia, vom descrie doi ce se pot folosi și la rețele cu circuite, precum și unul ce se poate aplica numai la rețele fără circuite.

Un algoritm ce folosește o operație cu matrice asociate rețelei.* Pentru descrierea acestui algoritm, introducem mai întîi o operație cu matrice pătrate de același ordin, după cum urmează: Fiind date matricele pătrate de ordinul n:

$$A = (a_{ij})_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,n},$$
$$B = (b_{ij})_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,n},$$

rezultatul operației este o matrice de același ordin cu ele:

$$A * B = C = (c_{ij})_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,n},$$

ale cărei elemente se definesc cu formula:

$$c_{ij} = \min_{k=1,\,2,\,\ldots,\,n} \{a_{ik} + b_{kj}\},\ i,\ j = 1,2,\ldots,\ n.$$

Fie acum o rețea R cu n vîrfuri, pentru care ponderile (valorile) atașate arcelor sînt numere reale, pozitive sau negative.

Pentru a calcula matricea $M = (m_{ij})_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,n}$, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei (cu convenția că avem $m_{ij} = \infty$, dacă rețeaua nu conține nici un drum de la vîrful x_i la vîrful x_j), folosim matricea ponderilor arcelor, notată c $L = (l_{ij})_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,n}$, ale cărei elemente se definesc astfel:

$$l_{ij} = \begin{cases} l(x_i, x_j), & \text{dacă } i \neq j \text{ și există arcul } (x_i, x_j) \text{ în } R, \\ \infty, & \text{dacă } i \neq j \text{ și nu există arcul } (x_i, x_j) \text{ în } R, \\ 0, & \text{dacă } i = j, \end{cases}$$

* Vezi și: I. Văduva, C. Dinescu, B. Săvulescu: „Modele matematice pentru organizarea și conducerea producției", Ed. didactică și pedagogică, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

unde prin $l(x_i, x_j)$ am notat ponderea (valoarea) asociată arcului (x_i, x_j) în rețeaua R. Pornind de la această matrice L, efectuăm succesiv următoarele operații:

$$M^{(2)} = L * L,$$
$$M^{(4)} = M^{(2)} * {}^{(2)},$$
$$M^{(8)} = M^{(4)} * {}^{(4)},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

până când două rezultate consecutive sînt egale:

$$M^{(2s)} = M^{(s)}.$$

În acest caz, oricare dintre aceste două matrice este egală cu matricea M căutată.

O egalitate de acest fel apare cu certitudine pentru $s \leqslant n-1$, dar numai în cazul în care nici una din matricele intermediare nu are elemente negative pe diagonala principală. În caz contrar, problema dată este imposibilă, existînd drumuri în rețea, nemărginite inferior.

În ceea ce privește determinarea efectivă a drumului (drumurilor) de valoare minimă de la x_i la x_j, procedăm după cum urmează:

— transpunem linia x_i din matricea L și o așezăm peste coloana x_j din matricea M, făcînd sumele perechilor de elemente ce se suprapun; dacă valoarea minimă a acestor sume este atinsă pentru elementul l_{ik} al matricei L, $k \neq i$, primul arc al drumului căutat este (x_i, x_k);

— transpunem apoi linia x_k din matricea L și o așezăm peste coloana x_j din matricea M, făcînd sumele perechilor de elemente ce se suprapun; dacă valoarea minimă a acestor sume este atinsă pentru elementul l_{km} al matricei L, $m \neq k$, cel de al doilea arc al drumului căutat este (x_k, x_m);

— continuăm în mod asemănător, pînă cînd sîntem conduși la un arc a cărui extremitate finală este x_j, obținîndu-se astfel drumul de valoare minimă de la x_i la vîrful x_j, de forma:

$$d(x_i, x_k, x_m, \ldots, x_j).$$

Este evident că dacă la un moment dat al aplicării acestei metode se obțin mai multe sume de valoare minimă, există mai multe drumuri de valoare minimă de la x_i la x_j în rețea și trebuie să le urmărim în mod separat.

Algoritmul descris poate fi aplicat și la determinarea matricei $\mathfrak{M} = (M_{ij})_{i,\, j = 1, 2, \ldots, n}$, ale cărei elemente dau valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei, în cazul în care rețeaua nu conține circuite de valoare pozitivă. În acest scop, algoritmul se modifică, în sensul că matricea L va conține $-\infty$ în loc de ∞, iar operația cu matricea folosită se definește prin:

$$c_{ij} = \max_{k = 1, 2, \ldots, n} \{a_{ik} + b_{kj}\},$$

fapt de care ținem seama și în determinarea drumului (drumurilor) de valoare maximă din rețea. Și de această dată problema poate fi imposibilă, anume cînd rețeaua conține circuite de valoare pozitivă, fapt ce se observă prin apariția unor elemente pozitive pe diagonala principală a matricelor obținute.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul lui Dantzig este un algoritm recursiv, ce determină matricea valorilor optime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri în subreţele ale reţelei date, cu număr din ce în ce mai mare de vîrfuri, pînă cînd se obţine matricea corespunzătoare reţelei date. Şi în acest algoritm vom folosi matricea L a ponderilor arcelor, definită anterior.

Fie reţeaua R cu n vîrfuri, aceste vîrfuri fiind numerotate de la 1 la n. Fie de asemenea următoarele subreţele ale reţelei date:

— R^2, ale cărei vîrfuri sînt x_1 şi x_2,
— R^3, ale cărei vîrfuri sînt x_1, x_2 şi x_3,
— R^4, ale cărei vîrfuri sînt x_1, x_2, x_3 şi x_4,
. . . . . .
— R^{n-1}, ale cărei vîrfuri sînt x_1, x_2,..., x_{n-1},
— R^n, care conţine toate vîrfurile reţelei date, deci care coincide cu această reţea.

Să notăm cu $M^k = (m_{ij}^k)_{i,\,j\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k}$ matricea ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale subreţelei R^k. Evident că matricea M^2 poate fi obţinută printr-o cercetare directă a subreţelei R^2. Într-o iteraţie oarecare, pentru a calcula matricea M^{k+1}, folosind matricea M^k obţinută anterior, se parcurg etapele ce urmează:

Etapa 1. Se calculează primele k elemente ale liniei x_{k+1} cu formula:

$$m_{k+1,\,j}^{k+1} = \min_{i\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k} \{\, l_{k+1,\,i} + m_{ij}^k \,\},\ j = 1,\,2,\ldots,\,k.$$

Etapa 2. Se calculează primele k elemente ale coloanei x_{k+1} cu formula:

$$m_{i,\,k+1}^{k+1} = \min_{j\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,k} \{\, m_{ij}^k + l_{j,\,k+1} \,\},\ i = 1,\,2,\ldots,\,k.$$

Etapa 3. Se verifică dacă reţeaua R^{k+1} conţine cel puţin un circuit de lungime strict negativă ce trece prin vîrful x_{k+1}, cu ajutorul elementului:

$$m_{k+1,\,k+1}^{k+1} = \min_{i\,=\,1,\,2,\,\ldots\,,\,n} \{\, 0,\ m_{k+1,\,i}^{k+1} + m_{i,\,k+1}^{k+1} \,\}.$$

Dacă se obţine $m_{k+1,\,k+1}^{k+1} < 0$, reţeaua R^{k+1} conţine cel puţin un circuit de lungime strict negativă şi problema dată îşi pierde sensul, existînd în reţeaua R drumuri de valori nemărginite inferior (algoritmul nu se mai poate continua). În caz contrar, adică dacă

$$m_{k+1,\,k+1}^{k+1} = 0,$$

se trece la etapa următoare.

Etapa 4. Se calculează toate celelalte elemente ale matricei M^{k+1} cu formula:

$$m_{ij}^{k+1} = \min \{\, m_{ij}^k ;\ m_{i,\,k+1}^{k+1} + m_{k+1,\,j}^{k+1} \,\},\ i,\,j = 1,\,2,\ldots,\,k.$$

Zonele de lucru ale celor patru etape ale iteraţiei sînt reprezentate în figura II.1.

Observaţii. 1). Determinarea efectivă a drumului (drumurilor) de valoare minimă între două vîrfuri precizate se poate face printr-o metodă asemă-

Scanned with OKEN Scanner

nătoare cu cea de la algoritmul precedent, sau urmărind iteraţiile algoritmului lui Dantzig de la sfîrşit spre început.

2) Algoritmul poate fi adaptat pentru determinarea matricei:

$$\mathfrak{M} = (M_{ij})_{i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ ,n},$$

ale cărei elemente sînt egale cu valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale unei reţele fără circuite strict pozitive, înlocuind peste tot valorile minime prin cele maxime şi folosind matricea L a ponderilor arcelor corespunzătoare acestei probleme. Şi aci problema determinării matricei $\mathfrak{M}$ îşi pierde sensul, dacă la etapa a treia obţinem:

$$M^{\,k+1}_{k+1,\,k+1} > 0.$$

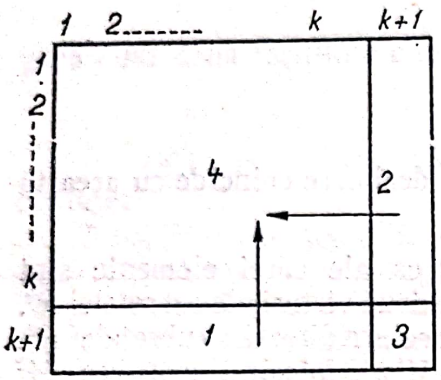


Fig. II. 1

Un algoritm ce se aplică numai la reţele fără circuite. Renumerotînd vîrfurile unei reţele R, fără circuite, aşa cum se arată în continuare, matricea M ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri, se poate scrie dintr-odată, element cu element, conform algoritmului ce urmează.

Etapa 1. Pornind de la matricea arcelor, A, a reţelei date, calculăm matricea D a drumurilor*, cu ajutorul căreia determinăm puterile de atingere ale tuturor vîrfurilor reţelei (puterea de atingere a unui vîrf oarecare este dată de suma elementelor liniei corespunzătoare acelui vîrf în matricea drumurilor).

Etapa 2. Triangularizăm superior matricea drumurilor, rearanjînd în ea liniile în ordine descrescătoare (nestrictă) a puterilor de atingere corespunzătoare vîrfurilor, după care aranjăm în matricea obţinută şi coloanele în aceeaşi ordine ca şi liniile. Fie D' matricea obţinută în final, iar $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ vîrfurile aşezate în noua ordine folosită.

Etapa 3. Scriem o nouă matrice, $L' = (l_{ij}')_{i,j=1,2,\ \ldots\ ,n}$, obţinută din matricea D' înlocuind toate elementele ce corespund arcelor din R prin ponderile (valorile) arcelor corespunzătoare, lăsînd toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero şi înlocuind toate celelalte elemente prin ∞.

Etapa 4. Scriem matricea $M' = (m_{ij}')_{i,j=1,2,\ \ldots\ ,n}$, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale reţelei, începînd cu toate elementele de pe diagonala principală, care sînt egale cu zero şi cu toate elementele de sub această diagonală, care sînt egale cu infinit. Celelalte elemente se determină succesiv, pe linii, de sus în jos, după regula ce urmează. Presupunînd că din matricea M' s-au determinat primele $j-1$ elemente ale liniei x_1, aşezăm linia x_1 din această matrice (linie parţial completată) peste coloana x_j din matricea L'; pentru fiecare pereche de elemente de acelaşi rang, facem suma lor şi alegem suma cea mai mică, pe care o scriem ca element următor al liniei x_1 din matricea M', în poziţia (x'_1, x'_j). În acest fel, se completează succesiv toate elementele liniei x'_1, după care se trece la linia următoare,

* Vezi „Modele matematice de organizare şi conducerea producţiei" de I. Văduva, C. Dinescu, B. Săvulescu, Ed. did. şi ped., 1974.

cu care se procedează în mod asemănător. Procedeul se continuă pînă cînd întreaga matrice M' este completată.

Odată cu determinarea unui element finit oarecare, m'_{ij}, care nu se găseşte pe diagonala principală, trecem într-un cerculeţ din căsuţa corespunzătoare acestui element şi indicele vîrfului (vîrfurilor) pentru care s-a realizat suma cea mai mică în procedeul indicat mai sus. Cu ajutorul acestor indici, se poate determina uşor drumul de valoare minimă între două vîrfuri specificate ale reţelei. Astfel, dacă se cere drumul de valoare minimă de la x'_i la x'_j, vom aplica următoarea regulă de aflare a lui:

— vîrful anterior lui x'_j în acest drum este cel al cărui indice este încercuit în poziţia (x'_i, x'_j) din matricea M', fie acesta x'_k;

— vîrful anterior lui x'_k în drumul căutat este cel al cărui indice este încercuit în poziţia (x'_i, x'_k) a matricei M' ş.a.m.d.

Evident că în cazul în care sîntem conduşi la mai mulţi indici încercuiţi în aceeaşi poziţie a matricei M', există mai multe drumuri de valoare minimă între vîrfurile specificate, toate posibilităţile de continuare a aplicării regulii de mai sus trebuind cercetate separat.

O b s e r v a ţ i i : 1) Algoritmul de mai sus poate fi adoptat pentru calcularea matricei ale cărei elemente sînt egale cu valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două elemente ale unei reţele fără circuite, înlocuind peste tot pe ∞ prin $-\infty$ şi reţinînd de fiecare dată în locul sumei minime, pe cea maximă.

2) Ultimul algoritm ce a fost descris mai sus se poate aplica cu succes în rezolvarea unor probleme practice importante, ale căror modele matematice folosesc reţele fără circuite. Dintre aceste probleme, specificăm două în cele ce urmează.

Utilizarea algoritmului de determinare a valorilor maxime ale drumurilor dintre vîrfurile unei reţele în probleme de conducere şi planificare a unor activităţi. Reţelele joacă un rol important în punerea în lucru şi urmărirea executării programelor de producţie sau de cercetare. În astfel de situaţii, modelul matematic folosit reprezintă o reţea-proiect, iar cel mai lung drum în acesta se numeşte drum critic. Fiecare arc al reţelei reprezintă o activitate distinctă şi valoarea lui este dată de durata corespunzătoare a activităţii. Fiecare vîrf corespunde la un punct de legătură a activităţilor. Toate activităţile corespunzătoare arcelor incidente spre interiorul unui vîrf trebuie terminate înaintea începerii oricărei activităţi corespunzătoare unui arc incident spre exteriorul aceluiaşi vîrf. Evident că, în aceste condiţii, reţeaua folosită nu poate avea circuite. Obiectivele cercetării sînt în acest caz următoarele:

a) Timpul minim necesar de la începerea lucrării pînă la terminarea ei, timp care corespunde cu lungimea drumului maxim (drum critic) în reţea, de la oricare din vîrfurile ce reprezintă începutul lucrării pînă la oricare din vîrfurile ce reprezintă sfîrşitul acestei lucrări.

b) Activităţile care sînt conţinute în drumul critic, activităţi a căror începere nu suferă amînări. Spre deosebire de acestea, lucrările ce nu sînt conţinute în drumul critic — şi care pot fi efectuate paralel cu el — au momente de începere ce pot varia între anumite limite.

c) Pentru controlul întregii lucrări în fiecare moment, este utilă calcularea matricei $\mathfrak{M}$, ce conţine valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale reţelei.

Scanned with OKEN Scanner

Fie o rețea-proiect, în care sursele (vîrfuri în care nu intră nici un arc) reprezintă evenimentul începerii întregii lucrări, iar ieșirile (vîrfuri din care nu pleacă nici un arc) reprezintă evenimentul terminării întregii lucrări. Pentru fiecare vîrf (nod) al rețelei se calculează un timp cel mai devreme și un timp cel mai tîrziu de începere a activităților corespunzătoare arcelor ce pornesc din nodul respectiv, astfel încît să poată fi respectat termenul, acesta fiind determinat de valoarea drumului critic. Se arată că timpul cel mai devreme pentru un vîrf oarecare este dat de lungimea timpului maxim de la vîrfurile ce reprezintă începutul întregii lucrări la vîrful dat, iar timpul cel mai tîrziu este dat de diferența dintre timpul total de pe drumul critic și lungimea drumului maxim de la vîrful considerat la vîrfurile ce reprezintă încheierea întregii lucrări. Diferența dintre timpul cel mai tîrziu și timpul cel mai devreme o vom numi timp de joc pentru evenimentul respectiv, ea indicînd cu cîte unități de timp pot fi întîrziate activitățile ce pornesc din vîrful corespunzător, astfel încît această întîrziere să nu afecteze termenul întregii lucrări. Este evident că timpul de joc al tuturor evenimentelor de pe drumul critic este egal cu zero, toate aceste evenimente neputînd suferi amînări.

De cele mai multe ori, timpul de realizare a unei activități oarecare, activitate reprezentată printr-un arc în modelul rețea, este o variabilă aleatoare, avînd o anumită distribuție. De aceea, vom considera drept lungimi ale arcelor valorile medii ale distribuțiilor respective, ținînd totodată seama în calcule și de dispersiile acestor distribuții. Metoda PERT folosește un procedeu de estimare simplificat, pentru media și dispersia timpului cerut de fiecare activitate, estimînd intuitiv trei timpuri de lucru pentru activitatea respectivă:

— timpul optimist (notat cu a), în care poate fi terminată întreaga activitate, dacă totul merge excepțional,

— timpul pesimist (notat cu b), în care poate fi terminată întreaga activitate, dacă totul se desfășoară în condiții grele,

— timp realist (notat cu m), un timp intermediar.

Aceste valori sînt estimate în mod intuitiv de specialiști și cu ajutorul lor se determină, făcînd în prealabil anumite presupuneri, media și dispersia timpului de lucru la activitate corespunzătoare, folosind următoarele formule:

$$E = \frac{1}{3}\left(2\ m + \frac{a+b}{2}\right),$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}\ (b-a)\right]^2.$$

Odată determinate aceste valori pentru toate arcele rețelei, pentru a determina valoarea medie a timpului minim necesar de a ajunge la o anumită etapă a desfășurării proiectului (un vîrf din modelul-rețea), se face o simplificare, considerînd că această valoare este dată de valoarea drumului cu media cea mai mare, de la vîrfurile ce reprezintă începutul întregei lucrări la vîrful respectiv. De asemenea, se presupune că timpurile necesare diferitelor operații sînt independente, astfel încît vom folosi un algoritm de determinare a valorilor maxime ale drumurilor dintre diferitele vîrfuri ale rețelei, considerînd drept ponderi atașate arcelor valorile medii respective. Vom atașa de asemenea valorilor maxime ale drumurilor dintre diferitele vîrfuri ale rețelei dispersiile corespunzătoare, egale cu suma dispersiilor timpurilor necesare realizării activităților de pe aceste drumuri.

Scanned with OKEN Scanner

Avînd un program inițial de desfășurare a activităților, înainte de a calcula probabilitatea de realizare a acestui program pentru un eveniment, este necesar să cunoaștem distribuția timpului cel mai devreme corespunzător acestui eveniment. În metoda PERT se presupune că această distribuție este normală, fapt justificat prin anumite condiții ce sînt îndeplinite în multe probleme practice.

Utilizarea algoritmului de determinare a valorilor maxime ale drumurilor dintre vîrfurile unei rețele în probleme de înlocuire optimă a echipamentelor.

O problemă de mare actualitate economică și pentru a cărei rezolvare s-au făcut multe încercări, datorită caracterului ei nedeterminist, este problema uzurii și determinării momentului optim de înlocuire a echipamentului. O politică optimală de înlocuire este un program, care determină în ce momente trebuie înlocuite mașinile, astfel încît cheltuielile legate de o perioadă cît mai lungă de timp să fie minime. Problema de a decide asupra momentului înlocuirii unui utilaj nu este o treabă ușoară pentru un specialist, deoarece el nu are destule informații care să-i dea posibilitatea să ia decizia optimă, în fața lui aflîndu-se multitudinea de posibilități imprevizibile.

Să presupunem că se cere să se minimizeze costul de folosire a mașinilor pentru o perioadă de n ani. Pentru a transpune problema în teoria rețelelor, vom considera fiecare an al perioadei de timp ca reprezentînd un vîrf al rețelei, anul prezent fiind vîrful zero. Arcul care unește vîrful i de vîrful j va simboliza păstrarea unei mașini în funcțiune la anul i și înlocuirea ei la anul j. Deoarece fiecare vîrf reprezintă un an, evident că graful nu poate avea circuite. Fiecărui arc (i,j) îi asociem o valoare cost c_{ij}, legată de folosirea mașinii în perioada de timp de la anul i la anul j. De exemplu, valoarea c_{26} va arăta cheltuielile legate de folosirea utilajului aflat în funcțiune începînd cu anul 2 și terminînd cu anul 6, c_{04} reprezintă cheltuielile legate de folosirea utilajului aflat în funcțiune în prezent, pînă în anul 4 ș.a.m.d. Menționăm că valorile c_{ij}, asociate fiecărui arc, sînt calculate pe bază de considerente practice, legate de experiența trecută. În momentul determinării volumului cheltuielilor viitoare, va trebui raportat acest volum la volumul cheltuielilor prezente și aceasta pentru a avea un indicator comparativ de bază.

Cu aceste precizări, politica optimală de înlocuire a utilajelor poate fi obținută utilizînd algoritmul drumului de valoare minimă pentru rețele fără circuite. Să admitem că folosind acest algoritm, am obținut succesiunea:

$$d\ (0,\ i,\ j,\ldots,k).$$

În această succesiune, fiecare element — mai puțin zero — reprezintă anul în care utilajul trebuie înlocuit. Analiza înlocuirii va fi desăvîrșită la sfîrșitul fiecărui an, iar utilajul este înlocuit la începutul perioadei corespunzătoare fiecărui an de înlocuire. Astfel, succesiunea de mai sus precizează că utilajul trebuie înlocuit acum, la începutul anului i, la începutul anului j ș.a.m.d.

Politica găsită nu trebuie privită ca fixă, deoarece se știe că informațiile folosite pentru găsirea acestui rezultat au avut un anumit grad de incertitudine. O analiză similară trebuie făcută în următorul an, folosind informațiile care au fost obținute în timpul perioadei de un an. În acest fel, politica de înlocuire va fi revizuită după fiecare an.

Se pune întrebarea firească ce se întîmplă dacă există și utilaje noi. Evident că se presupune că mașina nouă este considerată ca cea mai bună la timpul respectiv. Practic, este dificil să stabilim care este cea mai bună mașină la un moment dat. Pentru a înlătura această dificultate, pornind de la ideea că există k

Scanned with OKEN Scanner

noi utilaje, modificăm rețeaua asociată problemei, reprezentînd vîrful i prin vîrfurile $i_1, i_2, \ldots, i_k$, unde k este numărul total de alternative în anul i. Experiența dovedește că este bine să considerăm același număr de alternative în fiecare an.

Modificările în problemele de rută optimală. În activitatea practică survin deseori modificări în problemele ce au fost deja rezolvate. Pe de altă parte, apar uneori probleme ce diferă de altele rezolvate anterior doar prin cîteva dintre elementele lor constitutive. Datorită acestor considerente, se pune problema adaptării — în măsura în care este posibil — a calculelor făcute anterior, pentru determinarea matricei ale cărei elemente sînt egale cu valorile optime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale noii rețele, pentru a nu relua rezolvarea problemei de la început. Vom descrie, în cele ce urmează, algoritme de rezolvare a unei astfel de probleme, în următoarele două cazuri:

— cazul în care se micșorează ponderea (valoarea) atașată unui arc al rețelei,

— cazul în care se mărește ponderea (valoarea) atașată unui arc al rețelei.

a) Fie o rețea R, cu n vîrfuri, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. În cazul în care ponderea atașată arcului (x_s, x_t) se micșorează cu o cantitate strict pozitivă, elementele matricei $M' = (m'_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$, egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei R' obținute, se calculează folosind elementele matricei $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ corespunzătoare rețelei inițiale, parcurgînd etapele ce urmează:

Etapa 1. Se adaugă matricei M linia x_{n+1}, obținută din linia x_t a aceleiași matrice, adunînd la fiecare element al acestei linii ponderea nouă (micșorată) a arcului (x_s, x_t), notată prin $\tilde{l}_{st}$:

$$m_{n+1,j} = m_{tj} + \tilde{l}_{st}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 2. Se adaugă matricei M coloana x_{n+1}, identică cu coloana x_s a matricei M:

$$m_{i,n+1} = m_{i,s}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 3. Transpunem linia x_{n+1}, adăugată matricei M și o suprapunem cu coloana x_{n+1}, făcînd sumele elementelor de același rang și păstrînd suma minimă. În cazul în care se obține ca rezultat o valoare strict negativă, înseamnă că prin modificarea ponderii arcului (x_s, x_t), rețeaua obținută R' va avea cel puțin un circuit de valoare strict negativă și matricea M' își va pierde sensul (o parte dintre valorile minime ale drumurilor vor deveni egale cu $-\infty$). În cazul în care se obține însă o valoare nenegativă, se trece la etapa următoare.

Etapa 4. Toate elementele de pe diagonala principală a matricei M' se pun egale cu zero:

$$m'_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 5. Linia x_t și coloana x_s, din matricea M, se rezolvă identic în matricea M':

$$m'_{tj} = m_{tj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$m'_{is} = m_{is}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 6. Fiecare element m'_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, $i \neq t$, $j \neq s$, al noii matrice M', se calculează cu formula:

$$m'_{ij} = \min \{ m_{ij}, m'_{i,n+1} + m'_{n+1,j} \}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) În rețeaua R, cu n vîrfuri, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, să presupunem că ponderea atașată arcului (x_s, x_t) se mărește cu o cantitate strict pozitivă, de la valoarea l_{st} la valoarea $\tilde{l}_{st}$:

$$\tilde{l}_{st} > l_{st}.$$

Fie $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ matricea ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei inițiale și $M' = (m'_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ matricea analoagă din rețeaua R', obținută prin modificarea făcută. Elementele matricei M' se calculează parcurgînd etapele ce urmează:

Etapa 1. Adăugăm matricei M o linie suplimentară, x_{n+1}, obținută din linia x_t a sa, adunînd la toate elementele liniei ponderea inițială (nemodificată) a arcului (x_s, x_t):

$$m_{n+1,j} = m_{tj} + l_{st}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 2. Adăugăm matricei M o coloană suplimentară, x_{n+1}, identică cu coloana x_s a sa,

$$m_{i,n+1} = m_{is}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Etapa 3. Marcăm în matricea M (de exemplu, prin steluțe) toate elementele de pe diagonala principală, toate elementele de pe linia x_t și toate elementele de pe coloana x_s.

Etapa 4. Dintre elementele rămase nemarcate, marcăm acele elemente m_{ij} ale matricei M, pentru care avem:

$$m_{ij} < m'_{i,n+1} + m'_{n+1,j}.$$

Etapa 5. Din matricea M deducem o altă matrice, ajutătoare, pe care o vom nota cu $\tilde{L}$, făcînd următoarele operații:

— păstrăm toate elementele marcate,

— înlocuim fiecare element m_{ij} nemarcat, astfel încît rețeaua R conține arcul (x_i, x_j), prin ponderea acestui arc din rețeaua R',

— înlocuim fiecare element m_{ij} nemarcat, astfel încît rețeaua R nu conține arcul (x_i, x_j), prin ∞.

Etapa 6. Construim matricea $M' = M$ care dă valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei R, succesiv, adăugînd cîte o linie x_k și cîte o coloană x_k, pentru $k = 2, 3, \ldots, n$, pornind de la o matrice nulă de ordinul întîi, de fiecare dată efectuînd operațiile cerute de algoritmul lui Dantzig numai pentru elementele nemarcate și păstrînd neschimbate elementele marcate.

Observații: 1) Cazul în care modificarea rețelei constă în introducerea în rețea a unui arc (x_s, x_t), ce nu există inițial, cu o lungime finită, este un caz particular de micșorare a ponderii acestui arc, considerînd că inițial acest arc există în rețeaua dată, dar cu ponderea ∞.

Scanned with OKEN Scanner

2) Cazul în care modificarea rețelei constă în simpla eliminare a unui arc (x_s, x_t) din rețea este un caz particular de mărime a a ponderii acestui arc, considerînd noua pondere a lui egală cu ∞.

3) Dacă în rețeaua dată se fac mai multe modificări, algoritmul se aplică succesiv, de mai multe ori. Se pot totuși face și mai multe modificări în același timp, așa cum se va vedea într-o problemă rezolvată mai jos.

4) Pentru corectarea matricei M ce dă valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale unei rețele R, fără circuite de valoare strict pozitivă, se folosesc algoritme asemănătoare cu cele de mai sus, considerînd de fiecare dată max în loc de min și $>$ în loc $<$, bineînțeles inversînd cele două algoritme pentru cazurile micșorării, respectiv măririi ponderii atașate unui arc.

§ 2. PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Există șapte secții ale unei întreprinderi, notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_7$, între care trebuie făcut un schimb de produse sub diferite forme (finisate sau nu). Posibilitățile de transport între aceste secții sînt cele reprezentate prin arce în rețeaua R din figura II.2, ponderea atașată fiecărui arc fiind egală cu timpul de transport între secțiile corespunzătoare extremităților arcului respectiv.

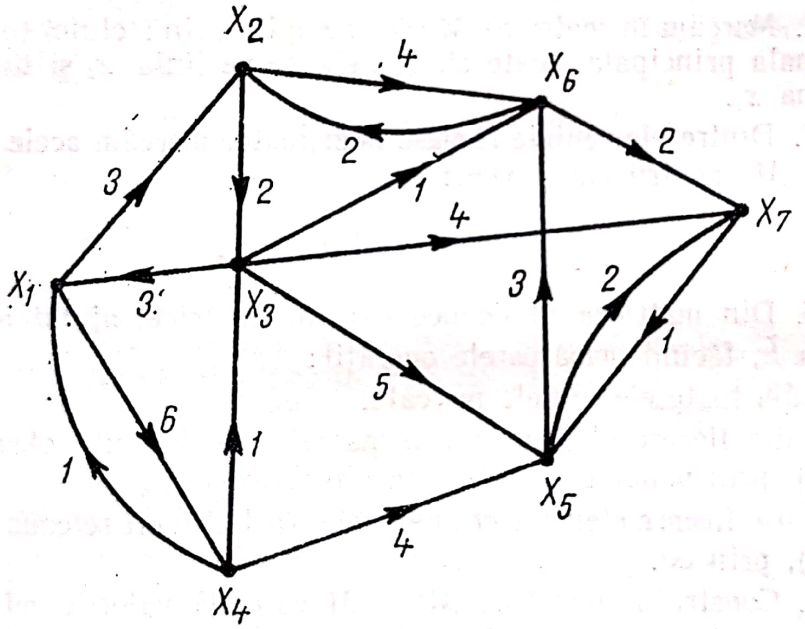


Fig. II.2

a) Să se arate cum trebuie organizat transportul între oricare două dintre cele șapte secții ale întreprinderii, astfel încît timpul total de transport să fie minim.

b) Să se planifice în acest sens în mod concret transportul de la secția x_1 la secția x_5.

c) Datorită unei organizări mai bune, se micșorează timpul de transport de la secția x_2 la secția x_6 cu două unități de timp. Să se corecteze soluția problemei în acest caz.

Scanned with OKEN Scanner

d) În condițiile de la întrebarea anterioară, apare o defecțiune, care obligă la renunțarea temporară a folosirii legăturii de la secția x_1 la secția x_7. Să se corecteze soluția problemei în acest caz.

Rezolvare

a) Matricea L, a ponderilor arcelor rețelei R, este următoarea:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru calcularea matricei M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei, vom aplica algoritmul ce folosește operații cu matrice pătrate. Pentru aceasta, operăm mai întîi matricea L cu ea însăși și obținem:

$$M^{(2)} = L * L = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 10 & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 2 & \infty & 7 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dăm ca exemplu de calcul efectiv obținerea primelor trei elemente ale liniei întîi a acestui rezultat:

$m_{11}^{(2)} = \min \{0 + 0; 3 + \infty; \infty + 3; 6 + 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 0,$

$m_{12}^{(2)} = \min \{0 + 3; 3 + 0; \infty + \infty; 6 + \infty; \infty + \infty; \infty + 2; \infty + \infty\} = 3,$

$m_{13}^{(2)} = \min \{0 + \infty; 3 + 2; \infty + 0; 6 + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 5.$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $M^{(2)} \neq L$, operăm matricea $M^{(2)}$ cu ea însăşi:

$$M^{(4)} = M^{(2)} * M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 10 & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 2 & \infty & 7 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 10 & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 2 & \infty & 7 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & 4 & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 10 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 11 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 7 & \infty & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 13 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & 6 & 8 & \infty & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $M^{(4)} \neq M^{(2)}$, operăm în continuare pe $M^{(4)}$ cu ea însăşi:

$$M^{(8)} = M^{(4)} * M^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 10 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 11 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 7 & \infty & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 13 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & 6 & 8 & \infty & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 10 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 11 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 7 & \infty & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 13 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & 6 & 8 & \infty & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 11 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 7 & 16 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 13 & 3 & 0 & 2 \\ 11 & 6 & 8 & 17 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece reţeaua are numai şapte vîrfuri, $M^{(6)}$ va reprezenta cu certitudine matricea M căutată (avem: $s > (n-1)$). De altfel, dacă am continua procedeul, am obţine: $M^{(16)} \equiv M^{(8)}$. Am găsit deci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 11 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 7 & 16 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 13 & 3 & 0 & 2 \\ 11 & 6 & 8 & 17 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transportul între oricare două secţii ale întreprinderii trebuie organizat pe ruta de valoare minimă dintre secţiile corespunzătoare, rută a cărei valoare se

Scanned with OKEN Scanner

găsește în matricea M și care se determină în mod efectiv tot cu ajutorul matricei M, așa cum se va vedea în cele ce urmează.

b) Valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_5 este de nouă unități, ceea ce înseamnă că timpul minim de transport de la secția x_1 la secția x_5 este de 9 unități de timp. Pentru a determina drumul efectiv, pe care trebuie organizat transportul între aceste secții, procedăm după cum urmează:

— transpunem linia x_1 din matricea L și o așezăm peste coloana x_5 din matricea M, făcînd sumele elementelor ce se suprapun; deoarece suma minimă este obținută pentru $l_{12} + m_{25}$, primul arc al drumului este (x_1, x_2);

— transpunem linia x_2 din matricea L și o așezăm peste coloana x_5 din matricea M, făcînd sumele elementelor ce se suprapun, deoarece suma minimă este $l_{23} + m_{35}$, cel de al doilea arc al drumului căutat este (x_2, x_3);

— transpunem linia x_3 din matricea L și o așezăm peste coloana x_5 din matricea M, făcînd sumele elementelor ce se suprapun; deoarece suma minimă este $l_{36} + m_{65}$, cel de al treilea arc al drumului este (x_3, x_6);

— transpunem linia x_6 din matricea L și o așezăm peste coloana x_5 din matricea M, făcînd sumele elementelor ce se suprapun; deoarece suma minimă este $l_{67} + m_{75}$, cel de al patrulea arc al drumului este (x_6, x_7);

— transpunem linia x_7 din matricea L și o așezăm peste coloana x_5 din matricea M, făcînd sumele elementelor ce se suprapun; deoarece suma minimă este $l_{37} + m_{55}$, ultimul arc al drumului căutat este (x_7, x_5).

Drumul de valoare minimă de la x_1 la x_5 este deci următorul:

$$d_{min}\ (x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_5),$$

această succesiune indicînd cum trebuie organizat transportul între secțiile indicate de problemă.

c) Deoarece s-a micșorat ponderea atașată arcului (x_2, x_7) cu o cantitate strict pozitivă, vom aplica algoritmul corespunzător, pentru corectarea matricei M, calculată mai sus. Respectiv, pentru etapele 1 și 2 ale acestui algoritm, atașăm matricei M linia x_8, obținută din linia x_6 prin mărirea cu două unități a tuturor elementelor ei (deoarece $\tilde{l}_{26} = 2$), precum și coloana x_8, identică cu coloana x_2 a sa. Se obține astfel următoarea matrice ajutătoare:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	3	5	6	9	6	8	3
x_2	5	0	2	11	6	3	5	0
x_3	3	3	0	9	4	1	3	3
x_4	1	4	1	0	4	2	4	4
x_5	10	5	7	16	0	3	2	5
x_6	7	2	4	13	3	0	2	2
x_7	11	6	8	17	1	4	0	6
x_8	9	4	6	15	5	2	4	0

Deoarece rețeaua nu conține valori negative atașate arcelor, acum este necesară aplicarea etapei 3 a algoritmului, iar prin convenție am scris: $m_{88} = 0$.

Următoarele trei etape determină direct elementele matricei M', ce dă valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei modificate. Elementele acestei matrice se scriu succesiv astfel:

Scanned with OKEN Scanner

— toate elementele de pe diagonala principală sînt nule,
— toate elementele liniei x_6 și coloanei x_2 coincid cu elementele corespunzătoare din matricea M,
— celelalte elemente se calculează cu ajutorul formulei indicate de etapa a șasea a algoritmului.

Se obține, astfel, următoarea matrice:

(M')

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	3	5	6	8	5	7
x_2	5	0	2	11	5	2	4
x_3	3	3	0	9	4	1	3
x_4	1	4	1	0	4	2	4
x_5	10	5	7	16	0	3	2
x_6	7	2	4	13	3	0	2
x_7	11	6	8	17	1	4	0

Dăm cîteva exemple de calcul al elementelor acestei matrice:

$$m'_{13} = \min \{m_{13};\ m_{18} + m_{83}\} = \min \{5;\ 3 + 6\} = 5,$$

$$m'_{14} = \min \{m_{14};\ m_{18} + m_{84}\} = \min \{6;\ 3 + 15\} = 6,$$

$$m'_{15} = \min \{m_{15};\ m_{18} + m_{85}\} = \min \{9;\ 3 + 5\} = 8,$$

$$m'_{16} = \min \{m_{16};\ m_{18} + m_{86}\} = \min \{6;\ 3 + 2\} = 5,$$

$$m'_{17} = \min \{m_{17};\ m_{18} + m_{87}\} = \min \{8;\ 3 + 4\} = 7.$$

După cum se vede, valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_5 a scăzut cu o unitate, drumul însuși devenind următorul:

$$d_{mtn}\ (x_1,\ x_5) = (x_1,\ x_2,\ x_6,\ x_7,\ x_5).$$

d) Sîntem în cazul în care trebuie să corectăm matricea M', datorită măririi ponderii axului $(x_6,\ x_7)$ de la 2 la ∞. Vom aplica deci cel de al doilea algoritm descris, pentru modificarea ponderii unui arc al rețelei. Conform primelor două etape ale acestui algoritm, atașăm matricei M' linia x_8, obținută din linia x_7 a sa, adunînd la fiecare element al său două unități (deoarece $l_{67} = 2$), precum și coloana x_8, identică cu coloana x_6 a sa. Obținem astfel următoarea matrice ajutătoare:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0*	3*	5*	6*	8	5*	7	5
x_2	5*	0*	2*	11*	5	2*	4	2
x_3	3*	3*	0*	9*	4	1*	3	1
x_4	1*	4*	1*	0*	4*	2*	4	2
x_5	10*	5*	7*	16*	0*	3*	2*	3
x_6	7*	2*	4*	13*	3	0*	2	0
x_7	11*	6*	8*	17*	1*	4*	0*	4
x_8	13	8	10	19	3	6	2	0

Scanned with OKEN Scanner

În această matrice, au fost marcate prin steluțe, conform etapelor 3 și 4, următoarele elemente:
— toate elementele de pe diagonala principală;
— toate elementele de pe linia x_7;
— toate elementele de pe coloana x_6;
— elementele din pozițiile: (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_5) (x_5, x_1), (x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_4), (x_5, x_7), (x_6, x_1), (x_6, x_2), (x_6, x_3), (x_6, x_4), deoarece pentru ele este verificată inegalitatea de la etapa a patra.

Matricea $\tilde{L}$, determinată în etapa a cincea, este următoarea:

$(\tilde{L})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0*	3*	5*	6*	∞	5*	∞
x_2	5*	0*	2*	11*	∞	2*	∞
x_3	3*	3*	0*	9*	∞	1*	∞
x_4	1*	4*	1*	0*	4*	2*	∞
x_5	10*	5*	7*	16*	0*	3*	2*
x_6	7*	2*	4*	13*	∞	0*	∞
x_7	11*	6*	8*	17*	1*	4*	0*

Aplicarea etapei a șasea poate începe cu matricea $\tilde{M}^4$, corespunzătoare subrețelei cu vîrfurile x_1, x_2, x_3 și x_4, deoarece toate elementele corespunzătoare grupelor de cîte două vîrfuri dintre acestea sînt marcate. Avem deci:

$(\tilde{M}^4)$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	5	6
x_2	5	0	2	11
x_3	3	3	0	9
x_4	1	4	1	0

Adăugînd subrețelei vîrful x_5, din întreaga matrice M^5 nu va trebui să calculăm decît trei elemente, cele corespunzătoare pozițiilor (x_1, x_5), (x_2, x_5) și (x_3, x_5), singurele ce nu sînt marcate cu steluțe în matricea $\tilde{L}$. Aceste elemente se calculează aplicînd formula de la etapa a doua a algoritmului lui Dantzig, obținînd următoarele valori:

$$\tilde{m}^5_{15} = \min\{0 + \infty;\ 3 + \infty;\ 5 + 5;\ 6 + 4\} = 10,$$

$$\tilde{m}^5_{25} = \min\{5 + \infty;\ 0 + \infty;\ 2 + 5;\ 11 + 4\} = 7,$$

$$\tilde{m}^5_{35} = \min\{3 + \infty;\ 3 + \infty;\ 0 + 5;\ 9 + 4\} = 5.$$

Celelalte elemente ale matricei $\tilde{M}^5$ se copiază din matricea $\tilde{L}$, fiind marcate. Avem deci:

$(\tilde{M}^5)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	5	6	10
x_2	5	0	2	11	7
x_3	3	3	0	9	5
x_4	1	4	1	0	4
x_5	10	5	7	16	0

Scanned with OKEN Scanner

Adăugînd acestei subreţele vîrful x_6, va trebui să calculăm din matricea $\tilde{M}^6$ numai elementele din poziţiile (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_5) şi (x_6, x_5), toate celelalte fiind egale cu cele corespunzătoare din matricea $\tilde{L}$. Conform etapei întîi a algoritmului lui Dantzig, avem:

$$\tilde{m}^6_{65} = \min\{7+10;\ 2+7;\ 4+5;\ 13+4;\ \infty+0\} = 9.$$

Apoi, conform etapei a patra a acestui algoritm, avem:

$$\tilde{m}^6_{15} = \min\{10;\ 5+9\} = 10,$$

$$\tilde{m}^6_{25} = \min\{\ 7;\ 2+9\} = 7,$$

$$\tilde{m}^6_{35} = \min\{\ 5;\ 1+9\} = 5.$$

Avem deci:

$(\tilde{M}^6)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	5	6	10	5
x_2	5	0	2	11	7	2
x_3	3	3	0	9	5	1
x_4	1	4	1	0	4	2
x_5	10	5	7	16	0	3
x_6	7	2	4	13	9	0

În sfîrşit, adăugînd vîrful x_7, avem de calculat pentru matricea $\tilde{M}^7 = M$ numai elementele din poziţiile (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_5), (x_6, x_5), (x_1, x_7), (x_2, x_7), (x_3, x_7), (x_4, x_7) şi (x_6, x_7). Conform etapei a doua a algoritmului lui Dantzig, avem:

$$\tilde{m}^7_{17} = \min\{0+\infty;\ 3+\infty;\ 5+4;\ 6+\infty;\ 10+2;\ 5+\infty\} = 9,$$

$$\tilde{m}^7_{27} = \min\{5+\infty;\ 0+\infty;\ 2+4;\ 11+\infty;\ 7+2;\ 2+\infty\} = 6,$$

$$\tilde{m}^7_{37} = \min\{3+\infty;\ 3+\infty;\ 0+4;\ 9+\infty;\ 5+2;\ 1+\infty\} = 4,$$

$$\tilde{m}^7_{47} = \min\{1+\infty;\ 4+\infty;\ 1+4;\ 0+\infty;\ 4+2;\ 2+\infty\} = 5,$$

$$\tilde{m}^7_{67} = \min\{7+\infty;\ 2+\infty;\ 4+4;\ 13+\infty;\ 9+2;\ 0+\infty\} = 8.$$

Apoi, aplicînd etapa a cincea a algoritmului lui Dantzig, avem:

$$\tilde{m}^7_{15} = \min\{10;\ 9+1\} = 10,$$

$$\tilde{m}^7_{25} = \min\{\ 7;\ 6+1\} = 7,$$

$$\tilde{m}^7_{35} = \min\{\ 5;\ 4+1\} = 5,$$

$$\tilde{m}^7_{65} = \min\{\ 9;\ 8+1\} = 9.$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest fel, am obținut următoarea matrice corectată a valorilor minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei.

$(\tilde{M})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	3	5	6	10	5	9
x_2	5	0	2	11	7	2	6
x_3	3	3	0	9	5	1	4
x_4	1	4	1	0	4	2	5
x_5	10	5	7	16	0	3	2
x_6	7	2	4	13	9	0	8
x_7	11	6	8	17	1	4	0

Cercetînd cazul particular al valorii optime a drumurilor de la x_1 la x_5, observăm că, de această dată, valoarea optimă este de 10 unități, existînd trei termeni cu această valoare și anume:

$$d^1_{\min}(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_5),$$
$$d^2_{\min}(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_7, x_5),$$
$$d^3_{\min}(x_1, x_5) = (x_1, x_4, x_5).$$

Problema 2. Cercetările statistice au arătat că aplicînd anumite tratamente suplimentare în prelucrarea unei piese, se mărește sau se micșorează timpul mediu de funcționare a piesei respective, cu un anumit număr de unități de timp, ce depind exclusiv de ordinea în care se fac aceste tratamente. Mai precis, modificarea timpului mediu de funcționare a piesei depinde de fiecare dată de tratamentul respectiv și de tratamentul efectuat anterior, existînd numai posibilitățile indicate prin arce în rețeaua din figura II.3, în care cele nouă tratamente posibile

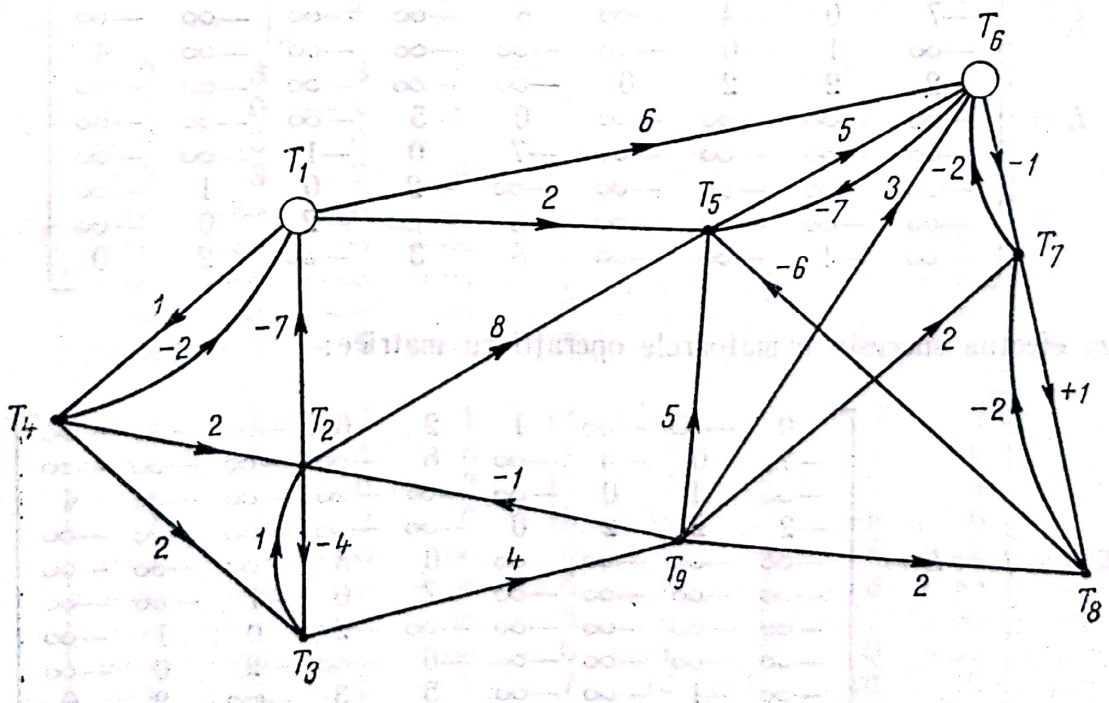


Fig. II.3

sînt reprezentate prin vîrfurile T_1, T_2,..., T_9. Astfel, de exemplu, după tratamentul T_1 se poate efectua unul din tratamentele T_4, T_5 sau T_6, posibilităţi reprezentate prin arcele (T_1, T_4), (T_1, T_5) şi (T_1, T_6) din reţea. Ponderea ataşată fiecărui arc (T_i, T_j) reprezintă cu cîte unităţi de timp creşte timpul mediu de funcţionare a piesei, dacă se aplică consecutiv tratamentele T_i şi T_j, cu convenţia că o valoare pozitivă reprezintă o creştere propriu-zisă, iar o valoare negativă reprezintă o scădere a acestui timp.

S-a observat că modificările din timpul mediu de funcţionare a piesei, descrise mai sus, se cumulează prin aplicarea succesivă a mai multe tratamente, această cumulare fiind posibilă pentru un număr total de tratamente nu prea mare, de cel mult zece tratamente succesive (aplicarea a mai mult de zece tratamente este incomodă şi prelungirea lor nu mai afectează substanţial timpul mediu de funcţionare a piesei).

a) Să se determine care dintre cele nouă tratamente posibile trebuie efectuat asupra piesei şi în ce ordine, astfel încît timpul mediu de funcţionare a piesei să crească cu un număr cît mai mare de unităţi de timp.

b) Să se cerceteze cum se modifică rezultatul, dacă în urma unor studii întreprinse se deduce că aplicarea tratamentului T_7 după tratamentul T_5 face să crească timpul mediu de funcţionare a piesei.

Rezolvare. Vom determina mai întîi matricea M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale reţelei date. Pentru aceasta, vom aplica algoritmul operaţiilor cu matrice pătrate, adaptat pentru maxim. Matricea L, corespunzătoare acestei probleme la reţeaua dată este următoarea:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & 1 & 2 & 6 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -7 & 0 & -4 & -\infty & 8 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 1 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -2 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -\infty & -2 & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty & -\infty & 5 & 3 & -\infty & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vom efectua succesiv următoarele operaţii cu matrice:

$$\mathcal{M}^{(2)} = L \times L = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & 1 & 2 & 6 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -7 & 0 & -4 & -\infty & 8 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 1 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -2 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -\infty & -2 & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty & -\infty & 5 & 3 & -\infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\times \begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & 1 & 2 & 6 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -7 & 0 & -4 & -\infty & 8 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 1 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -2 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -\infty & -2 & 0 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty & -\infty & 5 & 3 & -\infty & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & -\infty & -\infty \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 3 & -\infty & -\infty & 0 \\ -6 & 3 & 0 & -\infty & 9 & 7 & -\infty & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 10 & 4 & -\infty & -\infty & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & -2 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -\infty & 2 & 1 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -\infty & 7 & 10 & 2 & 2 & -\infty \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{M}^{(4)} = \mathfrak{M}^{(2)} * \mathfrak{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & -\infty & -\infty \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 3 & -\infty & -\infty & 0 \\ -6 & 3 & 0 & -\infty & 9 & 7 & -\infty & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 10 & 4 & -\infty & -\infty & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & -2 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -\infty & 7 & 10 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & -\infty & -\infty \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 3 & -\infty & -\infty & 0 \\ -6 & 3 & 0 & -\infty & 9 & 7 & -\infty & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 10 & 4 & -\infty & -\infty & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -7 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & -2 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -\infty & 7 & 10 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 12 & 10 & 8 & 9 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 14 & 13 & 7 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 16 & 14 & 8 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\mathfrak{M}^{(8)} = \mathfrak{M}^{(4)} * \mathfrak{M}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 12 & 10 & 8 & 9 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 14 & 13 & 7 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 16 & 14 & 8 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 10 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 12 & 10 & 8 & 9 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 14 & 13 & 7 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 16 & 14 & 8 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 10 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 14 & 19 & 18 & 17 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 13 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 16 & 15 & 16 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 18 & 17 & 18 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{M}^{(16)} = \mathfrak{M}^{(8)} * \mathfrak{M}^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 14 & 19 & 18 & 17 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 13 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 16 & 15 & 16 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 18 & 17 & 18 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 12 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 14 & 19 & 18 & 17 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 13 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 16 & 15 & 16 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 18 & 17 & 18 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 12 & 0 \end{bmatrix} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 14 & 19 & 18 & 19 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 13 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 16 & 15 & 16 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 18 & 17 & 18 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece rețeaua dată are numai nouă noduri, algoritmul a luat sfîrșit, matricea $\mathfrak{M}^{16}$ fiind identică cu matricea $\mathfrak{M}$ căutată,

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 & 14 & 19 & 18 & 19 & 7 \\ -7 & 0 & -4 & -6 & 8 & 13 & 12 & 13 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 11 & 16 & 15 & 16 & 4 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 13 & 18 & 17 & 18 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & 0 & -1 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 & 0 & 0 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -6 & -1 & -2 & 0 & -\infty \\ -8 & -1 & -5 & -7 & 7 & 12 & 11 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cel mai mare element al acestei matrice (egal cu cea mai mare creștere posibilă a timpului mediu de funcționare a piesei) este egal cu 19 și el corespunde trecerilor pe drumuri de la tratamentul T_1 la tratamentul T_6, respectiv T_8. Cele două drumuri de valoare maximă egală cu 19 unități sînt următoarele:

$$d_{\max}\ (T_1,\ T_6) = (T_1,\ T_4,\ T_3,\ T_9,\ T_2,\ T_5,\ T_6),$$

$$d_{\max}\ (T_1,\ T_8) = (T_1,\ T_4,\ T_3,\ T_9,\ T_2,\ T_5,\ T_6,\ T_7,\ T_8).$$

Este evident că preferăm primul drum optim dintre cele două de mai sus. În consecință, asupra piesei trebuie efectuate șapte din cele nouă tratamente, în ordinea:

$$T_1,\ T_4,\ T_3,\ T_9,\ T_2,\ T_5,\ T_6,$$

rezultatul fiind o creștere totală maximă a timpului mediu de funcționare de 19 unități de timp.

b) Deoarece se mărește ponderea arcului $(T_5,\ T_7)$ de la $-\infty$ la 5, fiind vorba de o problemă de maxim, aplicăm primul dintre cele două algoritme de la modificarea ponderii unui arc al rețelei, adaptat pentru maxim. Adăugăm deci matricei $\mathfrak{M}$ linia T_{10}, ale cărei elemente sînt egale cu elementele corespunzătoare ale liniei T_7, la care adăugăm cinci unități (deoarece $\tilde{l}_{57} = 5$), precum și co-

Scanned with OKEN Scanner

loana T_{10}, identică cu coloana T_5 a acestei matrice. Se obține astfel matricea ajutătoare ce urmează:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
T_1	0	6	3	1	14	19	18	19	7	14
T_2	−7	0	−4	−6	8	13	12	13	0	8
T_3	−4	3	0	−3	11	16	15	16	4	11
T_4	−2	5	2	0	13	18	17	18	6	13
T_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5	4	5	$-\infty$	0
T_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	−6	0	−1	0	$-\infty$	−6
T_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	−5	0	0	1	$-\infty$	−5
T_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	−6	−1	−2	0	$-\infty$	−6
T_9	−8	−1	−5	−7	7	12	11	12	0	7
T_{10}	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5	5	6	$-\infty$	0

Conform etapei a treia, calculăm:

$$\max\{-\infty+14;\ -\infty+8;\ -\infty+11;\ -\infty+13;\ 0+0;\ 5-6;\ 5-5;\ 6-6;\ -\infty+7\}=0$$

și, deoarece nu s-a obținut un rezultat strict pozitiv, introducerea arcului (T_5, T_7) nu face să apară nici un circuit de valoare strict pozitivă, astfel încît putem trece la etapele 4, 5 și 6.

Se obține astfel matricea:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
T_1	0	6	3	1	14	19	19	20	7
T_2	−7	0	−4	−6	8	13	13	14	0
T_3	−4	3	0	−3	11	16	16	17	4
T_4	−2	5	2	0	13	18	18	19	6
T_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5	5	6	$-\infty$
T_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	−6	0	−1	0	$-\infty$
T_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	−5	0	0	1	$-\infty$
T_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	−6	−1	−1	0	$-\infty$
T_9	−8	−1	−5	−7	7	12	12	13	0

De această dată, cel mai mare element al matricei obținute este egal cu 20, iar drumul cu această valoare este următorul:

$$d_{\max}(T_1, T_8) = (T_1, T_4, T_3, T_9, T_2, T_5, T_7, T_8).$$

În aceste condiții, trebuie aplicate opt dintre cele nouă tratamente asupra piesei, în ordinea indicată de drumul optim de mai sus, rezultatul fiind o creștere maximă a timpului mediu de funcționare de 20 unități de timp.

Problema 3. Între șapte puncte economice, notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_7$, trebuie organizat transportul unor produse, folosind posibilitățile de transport reprezentate prin arce în rețeaua din figura II.4. Ponderile atașate arcelor acestei rețele reprezintă costurile de transport pe unitatea de produs, între punctele corespunzătoare extremităților arcelor respective.

Scanned with OKEN Scanner

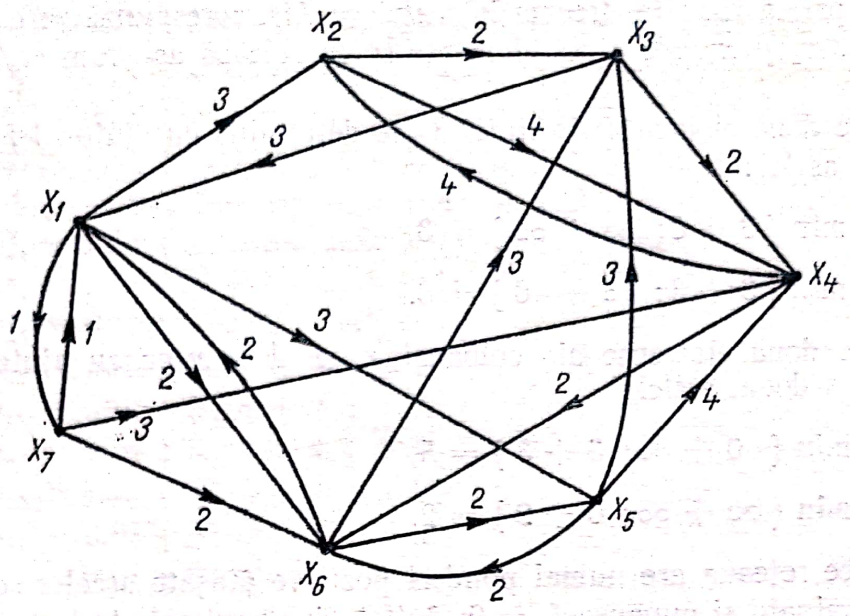


Fig. II.4

a) Să se arate cum trebuie organizat transportul între două puncte ale rețelei arbitrare, astfel încît costul total de transport să fie minim.

b) Să se corecteze soluția optimă, în cazul în care nu mai poate fi folosită legătura de la punctul x_1 la punctul x_6.

Rezolvare. Pentru determinarea matricei M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei, vom aplica algoritmul lui Dantzig. Matricea L, corespunzătoare rețelei este următoarea:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	3	∞	∞	3	2	1
x_2	∞	0	2	4	∞	∞	∞
x_3	3	∞	0	2	∞	∞	∞
x_4	∞	4	∞	0	∞	2	∞
x_5	∞	∞	3	4	0	2	∞
x_6	2	∞	3	∞	2	0	∞
x_7	1	∞	∞	3	∞	2	0

Pornim de la matricea M^2, care dă valorile minime ale drumurilor dintre vîrfurile subrețelei R^2 a rețelei date, ce conține numai vîrfurile x_1 și x_2. Aceasta are evident forma următoare:

(M^2)

	x_1	x_2
x_1	0	3
x_2	∞	0

Scanned with OKEN Scanner

Într-o primă iterație, trecem la matricea M^3, corespunzătoare subrețelei cu vîrfurile x_1, x_2 și x_3, ale cărei elemente se calculează așa cum se arată în continuare.

Primele două elemente ale liniei x_3 se determină cu ajutorul formulei de la etapa întîi astfel:

$$m_{31}^3 = \min\{3+0;\ \infty+\infty\} = 3,$$

$$m_{32}^3 = \min\{3+3;\ \infty+0\} = 6.$$

Primele două elemente ale coloanei x_3 se determină cu ajutorul formulei de la etapa a doua, astfel:

$$m_{13}^3 = \min\{0+\infty;\ 3+3\} = 5,$$

$$m_{23}^3 = \min\{\infty+\infty;\ 0+2\} = 2.$$

Deoarece rețeaua are numai ponderi pozitive atașate arcelor, etapa a treia poate fi terminată și punem $m_{33}^3 = 0$. Astfel, după primele trei etape ale primei iterații, din matricea M^3 cunoaștem următoarele elemente:

(M^3)

	x_1	x_2	x_3
x_1			5
x_2			2
x_3	3	6	0

Elementele rămase necalculate se determină cu ajutorul etapei a patra, astfel:

$$m_{11}^3 = \min\{0;\ 3+5\} = 0,\quad m_{21}^3 = \min\{\infty;\ 3+2\} = 5,$$

$$m_{12}^3 = \min\{3;\ 6+5\} = 3,\quad m_{22}^3 = \min\{0;\ 6+2\} = 0.$$

Deci, matricea M^3 a fost complet determinată, ea avînd următoarea formă:

(M^3)

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	3	5
x_2	5	0	2
x_3	3	6	0

În cea de a doua iterație a algoritmului, calculăm matricea M^4, corespunzătoare subrețelei cu vîrfurile x_1, x_2, x_3 și x_4, ea avînd forma următoare:

(M^4)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	5	7
x_2	5	0	2	4
x_3	3	6	0	2
x_4	9	4	6	0

Scanned with OKEN Scanner

Elementele acestei matrice au fost calculate succesiv astfel:

$$m_{41}^4 = \min\{\infty + 0;\ 4 + 5;\ \infty + 3\} = 9,$$
$$m_{42}^4 = \min\{\infty + 3;\ 4 + 0;\ \infty + 6\} = 4,$$
$$m_{43}^4 = \min\{\infty + 5\ ;\ 4 + 2;\ \infty + 0\} = 6,$$
$$m_{14}^4 = \min\{0 + \infty\ ;\ 3 + 4;\ 5 + 2\} = 7,$$
$$m_{24}^4 = \min\{5 + \infty\ ;\ 0 + 4;\ 2 + 2\} = 4,$$
$$m_{34}^4 = \min\{3 + \infty\ ;\ 6 + 4;\ 0 + 2\} = 2,$$
$$m_{44}^4 = 0,\ m_{11}^4 = m_{22}^4 = m_{33}^4 = 0,$$
$$m_{12} = \min\{3;\ 4 + 7\} = 3,$$
$$m_{13} = \min\{5;\ 6 + 7\} = 5,$$
$$m_{21} = \min\{5;\ 9 + 4\} = 5,$$
$$m_{23} = \min\{2;\ 6 + 4\} = 2,$$
$$m_{31} = \min\{3;\ 9 + 2\} = 3,$$
$$m_{32} = \min\{6;\ 4 + 2\} = 6.$$

În cea de a treia iterație, introducem vîrful x_5 și obținem matricea următoare:

(M^5)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	5	7	3
x_2	5	0	2	4	8
x_3	3	6	0	2	6
x_4	9	4	6	0	12
x_5	6	8	3	4	0

A patra iterație adaugă vîrful x_6, astfel încît obținem:

(M^6)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	5	7	3	2
x_2	5	0	2	4	8	6
x_3	3	6	0	2	6	4
x_4	4	4	5	0	4	2
x_5	6	7	3	4	0	2
x_6	2	5	3	5	2	0

În sfîrșit în ultima iterație a algoritmului, introducem și vîrful x_7 și obținem matricea M^7, identică cu matricea M căutată:

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	3	5	4	3	2	1
x_2	5	0	2	4	8	6	6
x_3	3	6	0	2	6	4	4
x_4	4	4	5	0	4	2	5
x_5	6	7	3	4	0	2	7
x_6	2	5	3	5	2	0	3
x_7	1	4	5	3	4	2	0

Scanned with OKEN Scanner

Transportul între oricare două puncte dintre cele șapte trebuie organizat de-a lungul drumului (drumurilor) de valoare minimă, dintre cele două puncte, costul total de transport fiind cel corespunzător acestor puncte, din matricea M.

b) Prin suprimarea arcului (x_1, x_6), putem considera că se mărește lungimea lui, de la valoarea doi la infinit. Pentru a corecta matricea M, în acest caz, aplicăm cel de al doilea algoritm de la modificarea ponderii unui arc. Prin aplicarea primelor patru etape ale acestui algoritm, obținem următoarele matrice:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0*	3*	5	4*	3*	2	1*	0
x_2	5*	0*	2*	4*	8*	6*	6*	5
x_3	3*	6*	0*	2*	6*	4*	4*	3
x_4	4*	4*	5*	0*	4*	2*	5*	4
x_5	6*	7*	3*	4*	0*	2*	7*	6
x_6	2*	5*	3*	5*	2*	0*	3*	2
x_7	1*	4*	5*	3*	4*	2*	0*	1
x_8	4*	7	5	7	4	2	5	0

În această matrice au rămas nemarcate numai două elemente și anume cele corespunzătoare pozițiilor (x_1, x_3) și (x_1, x_6). Deoarece nici unul dintre aceste arce nu mai există în rețeaua R modificată, cele două poziții le vom înlocui prin ∞ și vom obține matricea $\tilde{L}$ de mai jos:

$(\tilde{L})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0*	3*	∞	4*	3*	∞	1*
x_2	5*	0*	2*	4*	8*	6*	6*
x_3	3*	6*	0*	2*	6*	4*	4*
x_4	4*	4*	5*	0*	4*	2*	5*
x_5	6*	7*	3*	4*	0*	2*	7*
x_6	2*	5*	3*	5*	2*	0*	3*
x_7	1*	4*	5*	3*	4*	2*	0*

Pe această matrice reluăm algoritmul lui Dantzig, calculînd de fiecare dată numai elementele nemarcate. Începem cu matricea $\tilde{M}^2$, corespunzătoare subrețelei cu vîrfurile x_1 și x_2,

$(\tilde{M}^2)$

	x_1	x_2
x_1	0	3
x_2	5	0

De aici, trecem la matricea $\tilde{M}^3$ ce urmează, calculînd numai elementele $\tilde{m}^3_{13}$, pe celelalte copiindu-le din matricea $\tilde{L}$:

$(\tilde{M}^3)$

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	3	5
x_2	5	0	2
x_3	3	6	0

Scanned with OKEN Scanner

Adăugăm vîrful x_4 și obținem matricea M^4, din care calculăm de asemenea numai elementele $\tilde{m}^4_{13}$.

$(\tilde{M}^4)$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	5	4
x_2	5	0	2	4
x_3	3	6	0	2
x_4	4	4	5	0

În continuare, introducem vîrful x_5, calculînd doar elementul $\tilde{m}^5_{13}$:

$(\tilde{M}^5)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	5	4	3
x_2	5	0	2	4	8
x_3	3	6	0	2	6
x_4	4	4	5	0	4
x_5	6	7	3	4	0

Pentru determinarea matricei $\tilde{M}^6$, calculăm elementele $\tilde{m}^6_{13}$ și $\tilde{m}^6_{16}$ și obținem:

$(\tilde{M}^6)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	5	4	3	5
x_2	5	0	2	4	8	6
x_3	3	6	0	2	6	4
x_4	4	4	5	0	4	2
x_5	6	7	3	4	0	2
x_6	2	5	3	5	2	0

În sfîrșit, determinăm matricea $\tilde{M}^7 = \tilde{M}$, din care calculăm de asemenea aceleași două elemente:

$(\tilde{M})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	3	5	4	3	5	1
x_2	5	0	2	4	8	6	6
x_3	3	6	0	2	6	4	4
x_4	4	4	5	0	4	2	5
x_5	6	7	3	4	0	2	7
x_6	2	5	3	5	2	0	3
x_7	1	4	5	3	4	2	0

După cum se vede, modificarea făcută nu afectează decît valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_6, care se mărește cu o unitate.

Problema 4. Să presupunem că rețeaua din figura II.5 descrie un sistem economic, anume ponderile de pe arcele rețelei avînd semnificații legate de procesul economic concret studiat.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine matricea M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei.

b) Să se corecteze matricea M, determinată mai sus, dacă ponderea arcului (x_3, x_2) crește cu 5 unități, iar ponderea arcului (x_5, x_4) crește cu 3 unități.

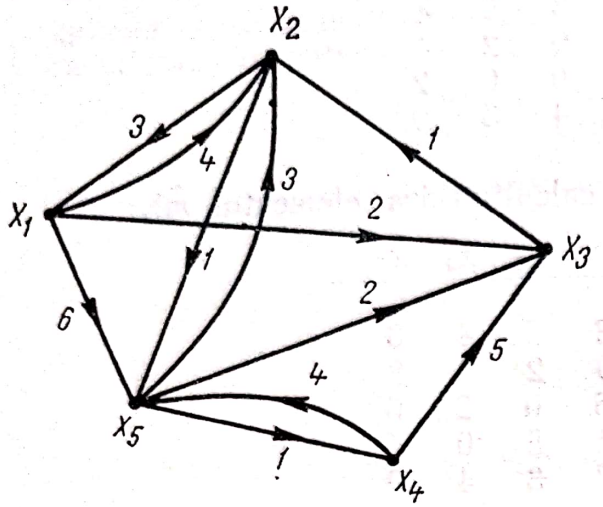


Fig. II.5

Rezolvare. Matricea L, a ponderilor arcelor rețelei, este următoarea:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	4	2	∞	6
x_2	3	0	∞	∞	1
x_3	∞	1	0	∞	∞
x_4	∞	∞	5	0	4
x_5	∞	3	2	1	0

a) Vom aplica algoritmul lui Dantzig, pornind direct de la matricea M^3, care dă valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale subrețelei cu vîrfurile x_1, x_2 și x_3 (matrice dedusă prin cercetare directă asupra acestei subrețele):

(M^3)

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	3	2
x_2	3	0	5
x_3	4	1	0

Adăugînd vîrful x_4, obținem

(M^4)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	2	∞
x_2	3	0	5	∞
x_3	4	1	0	∞
x_4	9	6	5	0

În sfîrșit, adăugînd vîrful x_5, obținem matricea M căutată:

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	2	5	4
x_2	3	0	3	2	1
x_3	4	1	0	3	2
x_4	9	6	5	0	4
x_5	6	3	2	1	0

b) Pentru corectarea matricei obținute, aplicăm primul algoritm pentru modificarea ponderii unui arc, deodată pentru ambele arce modificate. Pentru aceasta, adăugăm matricei M linia și coloana x_6, corespunzătoare modificării

Scanned with OKEN Scanner

arcului (x_3, x_2), precum și linia și coloana x_7, corespunzătoare modificării arcului (x_5, x_4). Astfel, linia x_6 se obține din linia x_2, adăugînd la elementele sale cîte o unitate, linia x_7 se obține din linia x_4 adăugînd la elementele ei cîte o unitate, iar coloanele x_6 și x_7 sînt identice respectiv cu coloanele x_3 și x_5. Pe matricea obținută se face o marcare a elementelor, după regula: se marchează toate elementele de pe diagonala principală, precum și acele elemente m_{ij}, pentru care sînt verificate concomitent relațiile:

$$m_{ij} < m_{i6} + m_{6j},$$
$$m_{ij} < m_{i7} + m_{7j}.$$

Se obține astfel matricea următoare:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0*	3	2*	5	4	2	4
x_2	3*	0*	3*	2	1*	3	1
x_3	4	1	0*	3	2	0	2
x_4	9	6	5*	0*	4*	5	4
x_5	6	3	2*	1	0*	2	0
x_6	4	1	4	3	2	—	—
x_7	10	7	6	1	5	—	—

În etapa a cincea a algoritmului, construim matricea $\tilde{L}$, care are forma următoare:

$(\tilde{L})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0*	4	2*	∞	6
x_2	3*	0*	3*	∞	1*
x_3	∞	6	0*	∞	∞
x_4	∞	∞	5*	0*	4*
x_5	∞	3	2*	4	0*

Din această matrice, aplicînd etapa a șasea a algoritmului, se obține matricea căutată:

(M')

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	4	2	9	5
x_2	3	0	3	5	1
x_3	9	6	0	11	7
x_4	10	7	5	0	4
x_5	6	3	2	4	0

Problema 5. Pentru repararea unei mașini, sînt necesare anumite operații, reprezentate prin arce pe rețeaua din figura II.6. Specialiștii responsabili cu fiecare operație au fost chestionați asupra duratei minime, duratei maxime și asupra duratei celei mai probabile pentru fiecare operație în parte, obținîndu-se rezultatele din tabelul II.1, în care duratele sînt exprimate în ore. Pentru realizarea proiectului reparației mașinii respective, s-a propus un program dat prin tabelul II.2, care conține termenele la care trebuie să se ajungă la fiecare eveniment (nod), considerînd ca moment inițial momentul începerii lucrării în ore).

(

Scanned with OKEN Scanner

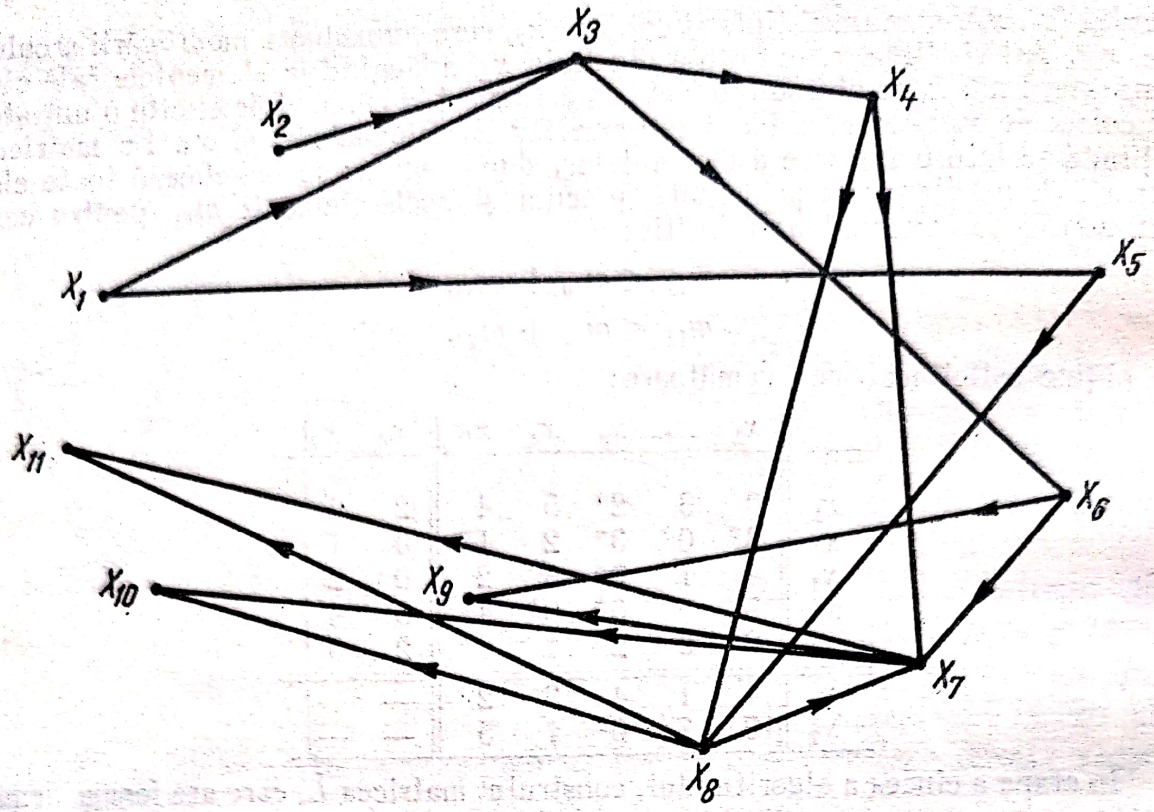


Fig. II.6

Tabelul II.1

Nr. curent	Operația (x_i, x_j)	Timpul optimist (a)	Timpul pesimist (b)	Timpul realist (m)
1	(x_1, x_3)	7	13	10
2	(x_1, x_5)	12	16	14
3	(x_2, x_3)	8	13	9
4	(x_2, x_5)	7	12	11
5	(x_3, x_4)	14	18	16
6	(x_3, x_8)	10	16	13
7	(x_4, x_7)	8	12	10
8	(x_4, x_8)	7	12	11
9	(x_5, x_8)	9	14	13
10	(x_6, x_7)	12	17	13
11	(x_6, x_9)	15	20	16
12	(x_7, x_9)	9	15	12
13	(x_7, x_{10})	8	17	11
14	(x_7, x_{11})	13	17	15
15	(x_8, x_7)	10	18	17
16	(x_8, x_{10})	8	14	11
17	(x_8, x_{11})	12	17	16

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine timpul cel mai devreme, timpul cel mai tîrziu și timpul de joc pentru fiecare eveniment, precum și probabilitatea cu care vor fi respectate termenele fixate în tabelul II.2.

Tabelul II.2

Evenimentul	Termenul	Evenimentul	Termenul
3	10	8	40
4	30	9	62
5	20	10	68
6	30	11	70
7	50	—	—

Rezolvare. Estimăm mai întîi media și dispersia timpului cerut pentru aplicarea fiecărei operații, cu ajutorul formulelor corespunzătoare, în funcție de timpul pesimist, timpul optimist și timpul realist respectiv. Obținem astfel tabelul II.3, în care fiecare eveniment apare de două ori, prima dată ca pornind dintr-un nod, iar cea de a doua oară ca intrînd într-un nod.

Tabelul II.3

Evenimentul	Eveniment precedent imediat			Eveniment urmînd imediat		
	Eveniment	Timpul necesar operației		Eveniment	Timpul necesar operației	
		Media	Dispersia		Media	Dispersia
x_{11}	x_8 x_7	15,5 15	0,69 0,44	—	—	—
x_{10}	x_8 x_7	11 11,5	1,00 2,25	—	—	—
x_9	x_7 x_6	12 16,5	1,00 0,69	—	—	—
x_8	x_5 x_4	12,5 10,5	0,69 0,69	x_7 x_{10} x_{11}	16 11 15,5	1,77 1,00 0,69
x_7	x_8 x_6 x_4	16 13,5 10	1,77 0,69 0,44	x_9 x_{10} x_{11}	12 11,5 15	1,00 2,25 0,44
x_6	x_3	13	1,00	x_7 x_9	13,5 16,5	0,69 0,69
x_5	x_2 x_1	10,5 14	0,69 0,44	x_8	12,5	0,69
x_4	x_3	16	0,44	x_7 x_8	10 10,5	0,44 0,69
x_3	x_2 x_1	9,5 10	0,69 1,00	x_4 x_6	16 13	0,44 1,00
x_2	—	—	—	x_3 x_5	9,5 10,5	0,69 0,69
x_1	—	—	—	x_3 x_5	10 14	1,00 0,44

Scanned with OKEN Scanner

Dăm ca exemplu de calcule, ale căror rezultate se găsesc în tabelul II.3, calculele pentru determinarea timpului mediu și dispersiei respective la operațiile (x_8, x_{11}) și (x_7, x_{11}), trecute la începutul tabelului. Pentru operația (x_8, x_{11}), tabelul II.1 ne dă valorile $a = 12$ ore, $b = 17$ ore, $m = 16$ ore.

Vom avea deci:

$$t = \frac{1}{3}\left[2m + \frac{a+b}{2}\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[32 + \frac{12+17}{2}\right] = 15{,}5 \text{ ore},$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}(b-a)\right]^2 = \left(\frac{17-12}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} = 0{,}69 \text{ ore}^2.$$

Pentru operația (x_7, x_{11}), tabelul II.1 ne dă valorile: $a=13$ ore, $b=17$ ore, $m = 15$ ore. Avem deci:

$$t = \frac{1}{3} \cdot \left[30 + \frac{13+17}{2}\right] = 15 \text{ ore},$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{17-13}{6}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0{,}44 \text{ ore}^2.$$

Pentru a determina matricea $\mathfrak{M}$ ale cărei elemente sînt egale cu valorile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei, vom aplica algoritmul special pentru rețele fără circuite. Pentru aceasta, vom scrie mai întîi matricea arcelor rețelei date:

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
x_8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Din această matrice, deducem matricea drumurilor, în care marcăm prin steluțe elementele egale cu unu, cărora le corespund și arce în rețea:

(D)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	
x_1	0	0	1*	1	1*	1	1	1	1	1	1	9
x_2	0	0	1*	1	1*	1	1	1	1	1	1	9
x_3	0	0	0	1*	0	1*	1	1	1	1	1	7
x_4	0	0	0	0	0	0	1*	1*	1	1	1	5
x_5	0	0	0	0	0	0	1	1*	1	1	1	5
x_6	0	0	0	0	0	0	1*	0	1*	1	1	4
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1*	1*	1*	3
x_8	0	0	0	0	0	0	1*	0	1	1*	1*	4
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Prin faptul că toate elementele de pe diagonala principală din matricea D sînt egale cu 0 se verifică că rețeaua dată nu are circuite.

Ultima coloană a matricei D arată ordinea puterilor de atingere. Pentru a obține ordinea descrescătoare a puterilor de atingere schimbăm ordinea vîrfurilor x_7 și x_8, obținînd în final matricea triangulară superior D'.

Înlocuind în această matrice elementele marcate cu steluță prin timpul mediu necesar efectuării operațiilor (tabelul II.3) și înlocuind toate celelalte elemente, în afară de cele de pe diagonala principală, prin $-\infty$, obținem matricea L din tabelul II.4, în care s-a scris de fiecare dată într-o paranteză, lîngă timpul mediu necesar unei operații, și dispersia respectivă.

Tabelul II.4

(L')

x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	x_7	x_9	x_{10}	x_{11}
x_1	0	$-\infty$	10 (1,00)	$-\infty$	14 (0,44)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
x_2	$-\infty$	0	9,5 (0,69)	$-\infty$	10,5 (0,69)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
x_3	$-\infty$	$-\infty$	0	16 (0,44)	$-\infty$	13 (1,00)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
x_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	10,5 (0,69)	10 (0,44)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
x_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	12,5 (0,69)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
x_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	13,5 (0,69)	16,5 (0,69)	$-\infty$	$-\infty$
x_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	16 (1,77)	$-\infty$	11 (1,00)	15,5 (0,69)
x_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	12 (1,00)	11,5 (2,25)	15 (0,44)
x_9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
x_{10}	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
x_{11}	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Elementele matricei $\mathfrak{M}'$ se vor scrie succesiv, pe linii, de sus în jos, ținînd seama că toate elementele sale de pe fiecare diagonală principală trebuie să fie nule, iar toate elementele de sub această diagonală egale cu $-\infty$. Vom începe calculul cu prima linie a acestei matrice, din care inițial nu avem decît primul element egal cu 0 (cel de pe diagonala principală). Pentru a determina cel de al

Scanned with OKEN Scanner

doilea element al liniei x_1, transpunem această linie cu un singur element calculat și o punem peste coloana a doua a matricei L': vom avea o singură suprapunere de elemente, anume zero peste $-\infty$, a căror sumă este egală cu $-\infty$. Cel de al doilea element al liniei x_1 este deci egal cu $-\infty$ și linia însăși capătă următoarea formă:

x_1	0	$-\infty$								

Pentru a determina cel de al doilea element al liniei x_1, transpunem linia x_1 și o punem peste coloana a treia a matricei L': avem două suprapuneri de elemente, anume 0 peste 10 și $-\infty$ peste 0, deci:

$$M'_{13} = \max \{0 + 10; -\infty + 0\} = 10$$

și, deoarece valoarea maximă a fost atinsă în dreptul liniei x_1 din matricea L, punem lîngă această valoare, într-un cerculeț, indicele 1, corespunzător acestui vîrf, iar în paranteză dispersia respectivă. În acest fel linia x_1 din matricea M' capătă următoarea formă:

x_1	0	$-\infty$	10 (1,00) ①							

Pentru calculul celui de al patrulea element al liniei x_1 transpunem linia x_1 în ultima sa formă și o suprapunem peste coloana x_4 a matricei L'; se obține în final

$$M'_{14} = \max \{0 - \infty; -\infty \; -\infty; 10 + 16\} = 26$$

și deoarece maximul a fost atins în dreptul liniei x_3 a matricei L', arătăm acest lucru încercuind indicele într-un cerculeț. De asemenea, într-o paranteză, scriem și suma dispersiilor corespunzătoare valorilor 10 și 16, care a condus la valoarea maximă: 1,00 + 0,44 = 1,44. Astfel, linia x_1 capătă forma următoare:

x_1	0	$-\infty$	10 (1,00) ①	24 (1,44) ③						

Procedînd în mod asemănător, se obține întreaga linie x_1 din matricea $\mathfrak{M}'$ după care se trece succesiv la obținerea liniilor $x_2, x_3, \ldots, x_{11}$. În final se obține matricea din tabelul II.5.

Cu ajutorul valorilor din acest tabel se construiește tabelul II.6, care dă media și dispersia timpului cel mai devreme și timpului cel mai tîrziu pentru fiecare eveniment (vîrf al rețelei).

În cele ce urmează, arătăm modul în care s-a completat tabelul II.6. Mai întîi, din tabelul II.5 s-a dedus că suma timpurilor necesare activităților de pe drumul critic are media de 67,5 ore, cu o dispersie de 4,34 ore. Aceasta, datorită faptului că valoarea maximă a drumurilor de la oricare dintre vîrfurile x_1, x_2 la oricare dintre vîrfurile x_9, x_{10} și x_{11} este de 67,5 unități.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 11.5

x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	x_7	x_9	x_{10}	x_{11}
x_1	0	$-\infty$	10 (1,00) ①	26 (1,44) ③	14 (0,44) ①	23 (2,00) ③	36,5 (2,13) ④	52,5 (3,90) ⑧	64,5 (4,90) ⑦	64 (6,15) ⑦	67,5 (4,34) ⑦
x_2	$-\infty$	0	9,5 (0,69) ②	25,5 (1,13) ③	10,5 (0,69) ②	22,5 (1,69) ③	36 (1,82) ④	52 (3,59) ⑧	64 (4,59) ⑦	63,5 (5,84) ⑦	67 (4,03) ⑦
x_3	$-\infty$	$-\infty$	0	16 (0,44) ③	$-\infty$	13 (1,00) ③	26,5 (1,13) ④	42,5 (2,90) ⑧	54,5 (3,90) ⑦	54 (5,15) ⑦	57,5 (3,34) ⑦
x_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	10,5 (0,69) ④	26,5 (2,46) ⑧	38,5 (3,46) ⑦	38 (4,71) ⑦	41,5 (2,90) ⑦
x_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	12,5 (0,69) ⑤	28,5 2,46 ⑧	40,5 (3,46) ⑦	40 (4,71) ⑦	43,5 (2,90) ⑦
x_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	13,5 (0,69) ⑥	25,5 (1,69) ⑦	25 (2,94) ⑦	28,5 (1,13) ⑦
x_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	16 (1,77) ⑧	28 (2,77) ⑦	27,5 (4,02) ⑦	31 (2,21) ⑦
x_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	12 (1,00) ⑦	11,5 (2,25) ⑦	15 (0,44) ⑦
x_9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
x_{10}	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
x_{11}	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Drumul critic este dat în consecință de drumul de valoare maximă de la x_1 la x_{11}, care se citește în matricea $\mathfrak{M}$ cu ajutorul indicilor încercuiți, el fiind următorul:

$$d_{max}(x_1, x_{11}) = (x_1, x_3, x_4, x_8, x_7, x_{11}).$$

Valoarea medie a timpului cel mai devreme pentru un eveniment oarecare este dată de valoarea maximă a drumurilor ce pornesc din vîrful x_1 sau vîrful x_2, care reprezintă începutul lucrării pînă la vîrul corespunzător evenimentului dat.

De exemplu, pentru vîrfurile x_{11}, x_{10}, x_9 și x_8, avem respectiv timpurile:

$$\max\{\mathfrak{M}_{1,11}, \mathfrak{M}_{2,11}\} = \max\{67,5; 67\} = 67,5,$$
$$\max\{\mathfrak{M}_{1,10}, \mathfrak{M}_{2,10}\} = \max\{64; 63,5\} = 64,$$
$$\max\{\mathfrak{M}_{19}, \mathfrak{M}_{29}\} = \max\{64,5; 64\} = 64,5,$$
$$\max\{\mathfrak{M}_{18}, \mathfrak{M}_{28}\} = \max\{36,5; 36\} = 36,5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.6

Evenimentul	Timpul cel mai devreme		Timpul cel mai tîrziu		Timpul de joc	Programul propus	Probabilitatea de realizare a programului propus
	Valoare medie	Dispersie	Valoare medie	Dispersie			
x_{11}	67,5	4,34	6,75	0	0	70	0,89
x_{10}	64	6,15	67,5	0	3,5	68	0,96
x_9	64,5	4,90	67,5	0	3	62	0,13
x_8	36,5	2,13	36,5	2,21	0	40	0,99
x_7	52,5	3,90	52,5	0,44	0	50	0,10
x_6	23	2	39	1,13	16	30	1,00
x_5	14	0,44	24	2,90	10	20	1,00
x_4	26	1,44	26	2,90	0	30	0,999
x_3	10	1,00	10	3,34	0	10	0,50
x_2	0	0	0,5	4,03	0,5		
x_1	0	0	0	4,34	0		

Dispersiile corespunzătoare acestor timpuri sînt cele scrise în paranteze lîngă valorile respective, în tabelul II.5. Pentru a determina timpul cel mai tîrziu pentru un eveniment oarecare, scădem din 67,5 ore (cantitate fixă) valoarea maximă a drumurilor de la vîrful respectiv la vîrfurile x_9, x_{10} și x_{11}, care reprezintă sfîrșitul lucrării. De exemplu, pentru vîrfurile x_8, x_7 și x_6 avem respectiv timpurile:

$$67{,}5 - \max\{\mathfrak{M}_{89}, \mathfrak{M}_{8,10}, \mathfrak{M}_{8,11}\} = 67{,}5 - \max\{28; 27{,}5; 31\} = 67{,}5 - 31 = 36{,}5 \text{ ore},$$

$$67{,}5 - \max\{\mathfrak{M}_{79}, \mathfrak{M}_{7,10}, \mathfrak{M}_{7,11}\} = 67{,}5 - \max\{12; 11{,}5; 15\} = 67{,}5 - 15 = 52{,}5 \text{ ore},$$

$$67{,}5 - \max\{\mathfrak{M}_{69}, \mathfrak{M}_{6,10}, \mathfrak{M}_{6,11}\} = 67{,}5 - \max\{25{,}5; 25; 28{,}5\} = 67{,}5 - 28{,}5 = 39.$$

Dispersia oricărui timp de acest fel este dată de suma dispersiilor de pe drumul de valoare maximă, de la vîrful respectiv la vîrfurile x_9, x_{10} și x_{11}. De exemplu, pentru vîrful x_8, valoarea maximă a drumurilor de la acest vîrf la x_9, x_{10} și x_{11} este de 31 unități, drumul optim fiind (x_8, x_7, x_{11}); suma dispersiilor de pe acest drum este dată de:

$$1{,}77 + 0{,}44 = 2{,}21 \text{ ore}^2.$$

La fel, pentru vîrful x_5, valoarea maximă a drumurilor de la acest vîrf la x_9, x_{10} și x_{11} este de 43,5 unități, drumul optim fiind (x_5, x_8, x_7, x_{11}); suma dispersiilor de pe acest drum este:

$$0{,}69 + 1{,}77 + 0{,}44 = 2{,}90 \text{ ore}^2.$$

Coloana cu timpul de joc pentru cele 11 evenimente a fost obținută scăzînd de fiecare dată timpul cel mai devreme din timpul cel mai tîrziu.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina probabilitatea de realizare a programului propus pentru un eveniment oarecare, vom folosi formula:

$$P(t < t_0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{t_0 - m}{\sigma}\right),$$

deoarece considerăm distribuția acestui timp normală. De exemplu, pentru vîrful x_{11}, vom avea:

$$P(t < 70) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{70 - 67{,}5}{\sqrt{4{,}34}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{2{,}5}{2{,}08}\right) = 0{,}5 + \Phi(1{,}2) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}39 = 0{,}89.$$

Putem spune deci că sînt șanse 89% ca în 70 ore să se ajungă la evenimentul x_{11}.

La fel, pentru vîrful x_{10}, vom avea calculele:

$$P(t < 68) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{68 - 64}{\sqrt{6{,}15}}\right) = 0{,}5 + \Phi(1{,}7) = 0{,}5 + 0{,}46 = 0{,}96.$$

Pentru vîrful x_9, avem:

$$P(t < 62) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{62 - 64{,}5}{\sqrt{4{,}9}}\right) = 0{,}5 + \Phi(-1{,}13) = 0{,}5 - 0{,}37 = 0{,}13$$

și tot așa mai departe.

Problema 6. Serviciul mecanic al unei întreprinderi dorește să-și întocmească un plan de cheltuieli, legate de întreținerea unor mașini, pentru o perioadă de șapte ani. În acest scop, serviciul trebuie să cunoască, în afara cheltuielilor legate de întreținerea mașinilor cît ele sînt în funcțiune, momentele de înlocuire a unei mașini uzate cu o altă mașină, pentru care cheltuielile de întreținere sînt mai mici decît dacă s-ar menține încă în funcțiune mașina înlocuită.

Pe arcele (i, j) ale rețelei din figura II.7 au fost trecute cheltuielile legate de întreținerea unei mașini, ce se află în funcțiune la anul i și care este înlocuită la

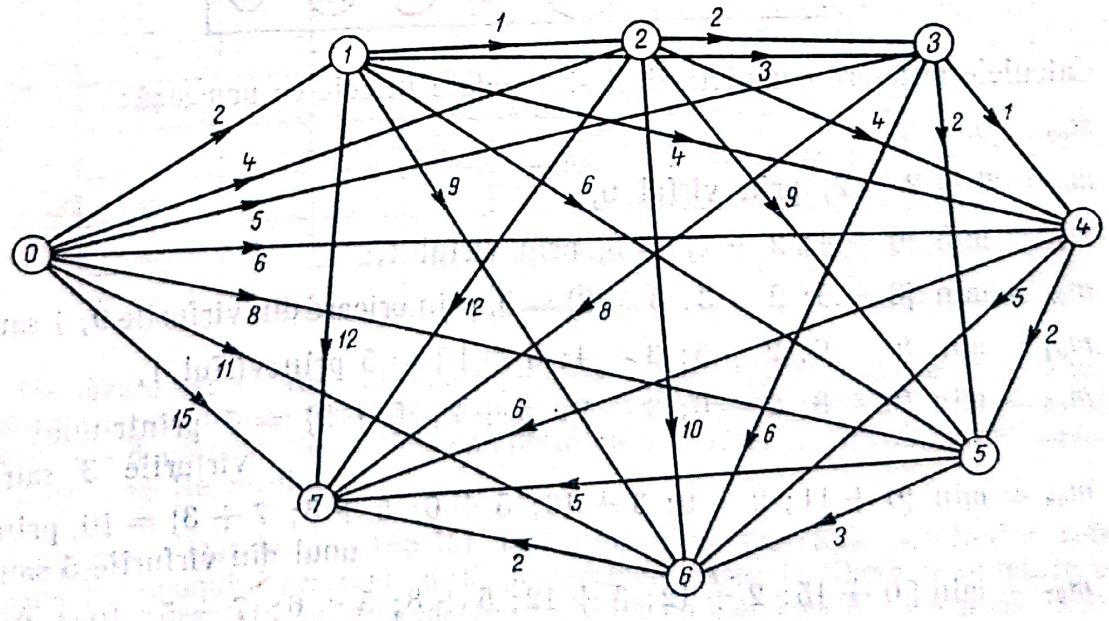


Fig. II.7

anul j. Serviciul presupune aceste cheltuieli pe baza fișelor de evidență din anii precedenți, întocmite de serviciul normare.

În aceste condiții, se cere să se determine succesiunea anilor de înlocuire a unei mașini, precum și cheltuielile totale probabile, în decursul celor șapte ani.

Rezolvare. În condițiile date, rețeaua din figura II.7 nu poate avea circuite. De aceea, pentru determinarea matricei M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri, se poate aplica algoritmul specific acestui tip de rețele. Mai mult, nu este nevoie să calculăm întreaga matrice M, ci numai prima linie a ei (ne interesează cheltuielile minime de la momentul zero la începutul anului al șaptelea). Un calcul simplu arată că matricea arcelor rețelei date coincide cu matricea drumurilor triangularizată, astfel încît matricea L' atașată rețelei are forma următoare:

(L')

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	2	4	5	6	8	11	15
1	∞	0	1	3	3	6	9	12
2	∞	∞	0	2	4	9	10	12
3	∞	∞	∞	0	1	2	6	8
4	∞	∞	∞	∞	0	2	5	6
5	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	5
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Prima linie a matricei M', determinată cu ajutorul etapei a patra a algoritmului, are forma următoare:

0	0	2	3	5	5	7	10	11
		⑥	①	0,1,2	①	3,4	5,6	④

Calculele necesare completării ei sînt redate în cele ce urmează:

$m_{00} = 0$,

$m_{01} = 0 + 2 = 2$, prin vîrful 0,

$m_{02} = \min\{0 + 4; 2 + 1\} = 3$, prin vîrful 1,

$m_{03} = \min\{0 + 5; 2 + 3; 3 + 2\} = 5$, prin oricare din vîrfurile 0, 1 sau 2,

$m_{04} = \min\{0 + 6; 2 + 3; 3 + 4; 5 + 1\} = 5$ prin vîrful 1,

$m_{05} = \min\{0 + 8; 2 + 6; 3 + 9; 5 + 2; 5 + 2\} = 7$ printr-unul din vîrfurile 3 sau 4,

$m_{06} = \min\{0 + 11; 2 + 9; 3 + 10; 5 + 6; 5 + 5; 7 + 3\} = 10$, printr-unul din vîrfurile 5 sau 6,

$m_{07} = \min\{0 + 15; 2 + 12; 3 + 12; 5 + 8; 5 + 6; 7 + 5; 10 + 2\} = 11$, prin vîrful 4.

Scanned with OKEN Scanner

Drumul de valoare minimă de la vîrful 0 la vîrful 7 are deci 11 unităţi. Succesiunea corespunzătoare de vîrfuri poate fi găsită în sens invers, folosind indicii precizaţi de fiecare dată în cerculeţe şi anume:

— avem $m_{07} = 11$ prin vîrful 4;
— avem $m_{04} = 5$ prin vîrfui 1;
— avem $m_{01} = 2$ prin vîrful 0.

Succesiunea de vîrfuri corespunzătoare drumului minim este deci (0, 1, 4, 7). Maşinile cercetate trebuie deci înlocuite acum, peste un an, peste 4 ani şi peste 7 ani, cheltuielile de întreţinere probabile pentru perioada de 7 ani fiind în acest caz de 11 unităţi băneşti.

Problema 7. Serviciul organizarea muncii dintr-o întreprindere trebuie să-şi facă un plan de cheltuieli pe o perioadă de patru ani, legate de întreţinerea unor utilaje. Se presupune că în fiecare an întreprinderea dispune de posibilitatea alegerii dintre două utilaje, notate simbolic prin *a*, respectiv *b*, pe acela care conduce la cheltuieli minime pe întreaga perioadă cercetată.

În tabelul II.7 sînt trecute cheltuielile *b* de întreţinere, legate de folosirea unui utilaj (de tip *a*, respectiv *b*) care intră în funcţiune la anul *i* şi este înlocuit la anul *j*.

Tabelul II.7

	0	1*a*	1*b*	2*a*	2*b*	3*a*	3*b*	4*a*	4*b*
0	0	1	2	5	6	8	10	13	12
1*a*		0		4	5	5	6	9	8
1*b*			0	2	2	5	6	9	10
2*a*				0		2	2	6	7
2*b*					0	3	3	6	7
3*a*						0		3	4
3*b*							0	4	2
4*a*								0	
4*b*									0

Pe baza acestor date, cunoscute pe baza experienţei trecute, se cere să se determine succesiunea anilor înlocuirii, precum şi maşina aleasă de fiecare dată dintre cele două posibile, astfel ca cheltuielile totale, pe întreaga perioadă de patru ani, să fie minime.

Rezolvare. Datele din tabelul II.7 reprezintă matricea ponderilor reţelei asociate fenomenului cercetat, dacă presupunem căsuţele libere completate prin ∞. Şi de această dată, această matrice coincide cu matricea L'. De aceea, pentru calcularea liniei 0 a matricei M', ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime

Scanned with OKEN Scanner

ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei, aplicăm direct etapa a patra a algoritmului corespunzător, obținînd succesiv următoarele valori:

$m_{0,1a} = 1$ (prin 0),
$m_{0,1b} = 2$ (prin 0),
$m_{0,2a} = \min\{5; 5; 4\} = 4$ (prin $1b$),
$m_{0,2b} = \min\{6; 6; 4\} = 4$ (prin $1b$),
$m_{0,3a} = \min\{8; 6; 7; 6; 7\} = 6$ (prin $1a$ sau $2a$),
$m_{0,3b} = \min\{10; 7; 8; 6; 7\} = 6$ (prin $2a$),
$m_{0,4a} = \min\{13; 10; 11; 10; 10; 9; 10\} = 9$ (prin $3a$),
$m_{0,4b} = \min\{12; 9; 12; 11; 11; 10; 8\} = 8$ (prin $3b$).

Valoarea minimă a drumurilor de la 0 la $4a$, sau la $4b$, este de 9, respectiv 8 unități. Evident că vom alege cel de 8 unități, adică drumul optim de la 0 la $4b$. Urmărind vîrf cu vîrf acest drum, în sens invers, cu ajutorul indicatorilor din paranteze, obținem succesiunea:

$$0 \longrightarrow 1b \longrightarrow 2a \longrightarrow 3b \longrightarrow 4b,$$

adică utilajul trebuie schimbat în fiecare an, în sensul indicat de literele alăturate anilor.

§ 3. PROBLEME PROPUSE

1. În prelucrarea lui, un produs poate trece pe la unele din stațiile S_1, $S_2,\ldots,S_8$, în care se fac anumite prelucrări suplimentare ale lui și între care există un sistem de transport, reprezentat sub forma rețelei din figura II.8. Ponderea atașată unui an oarecare, (S_i,S_j), din această rețea, reprezintă, dacă este pozitivă, o mărire a beneficiului net asupra unității de produs ce trece de la stația S_i la stația S_j, pentru prelucrarea respectivă, iar dacă este negativă o micșorare a

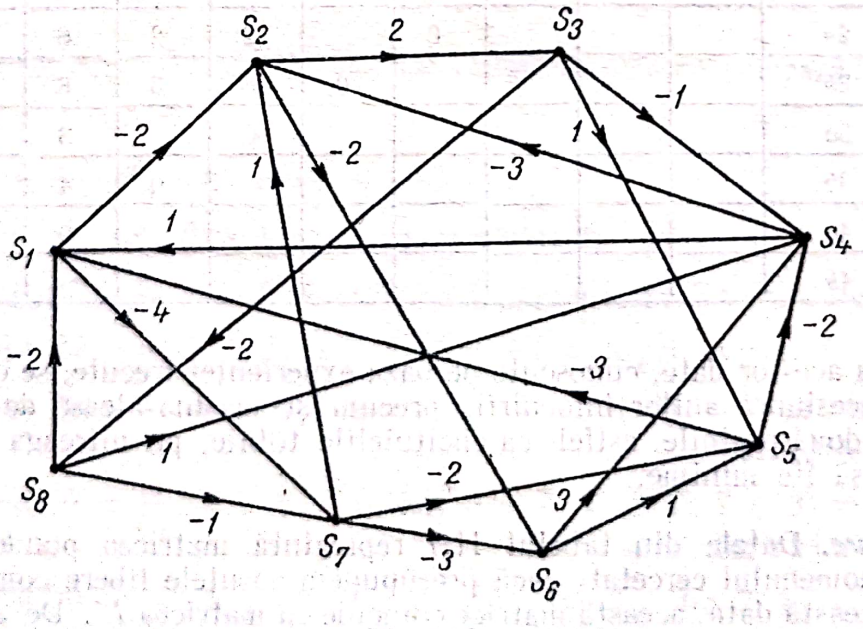


Fig. II.8

acestui beneficiu, datorită faptului că transportul unitar de la S_i la S_j costă mai mult decît se cîştigă prin îmbunătăţirea adusă de prelucrarea respectivă.

a) Să se determine prin care dintre cele opt staţii şi în ce ordine trebuie transportat produsul dacă, prin ajungerea lui în oricare dintre aceste staţii, el trebuie supus prelucrării corespunzătoare acestei staţii şi astfel încît mărirea totală a beneficiului net la unitatea de produs să fie maximă.

b) Să se cerceteze cum se modifică soluţia problemei, dacă şi beneficiul suplimentar net la unitatea de produs, transportat de la staţia S_6 la staţia S_4, scade cu două unităţi.

Soluţie:

a) Produsul trebuie transportat succesiv pe drumul:

$$d = (S_6, S_4, S_1, S_2, S_3, S_5),$$

ceea ce aduce un beneficiu net total la unitatea de produs de 5 u. b.

b) De această dată, produsul trebuie să treacă succesiv prin staţiile drumului:

$$d' = (S_7, S_2, S_3, S_5),$$

ceea ce aduce un beneficiu suplimentar de 4 u.b. la unitatea de produs.

2. Între opt puncte ale unui sistem economic există anumite posibilităţi de transport, reprezentate prin reţeaua din figura II.9, unde ponderile ataşate arcelor reprezintă cheltuielile de transport corespunzătoare, pe unitatea de produs transportată.

a) Să se arate cum trebuie organizat transportul între oricare două puncte ale sistemului, astfel încît costul total de transport între aceste puncte să fie minim.

b) Să se arate cum se modifică această organizare, dacă apare o nouă posibilitate de transport, reprezentată prin arcul (x_3, x_7), cu ponderea de două unităţi băneşti.

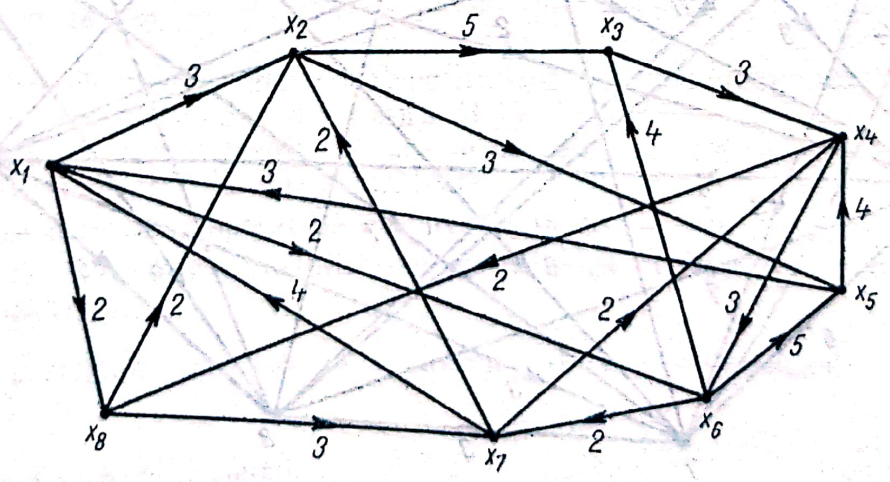


Fig. II.9

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) Transportul trebuie organizat pe drumurile de valoare minimă din rețea, ce se determină în următoarea matrice a valorilor minime:

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	3	6	6	6	2	4	2
x_2	6	0	5	7	3	8	10	8
x_3	12	7	0	3	10	6	8	5
x_4	9	4	7	0	7	3	5	2
x_5	3	6	9	4	0	5	7	5
x_6	6	4	4	4	5	0	2	6
x_7	4	2	7	2	5	5	0	4
x_8	7	2	7	5	5	8	3	0

b) Se modifică numai șase valori ale acestei matrice, ele căpătînd următoarele valori:

$$\tilde{m}_{18}=7,\ \tilde{m}_{31}=9,\ \tilde{m}_{32}=4,\ \tilde{m}_{35}=7,\ \tilde{m}_{37}=5,\ \tilde{m}_{38}=2.$$

3. Pentru stabilirea unui plan de înlocuire a unei mașini, se strîng date în ceea ce privește cheltuielile de întreținere probabile asupra unei mașini ce se află în funcțiune la anul i, $i = 0, 1, \ldots, 7$, și este înlocuită la anul j, $j = 1,2,\ldots,8$. Aceste cheltuieli reprezintă ponderile arcelor rețelei din figura II.10.

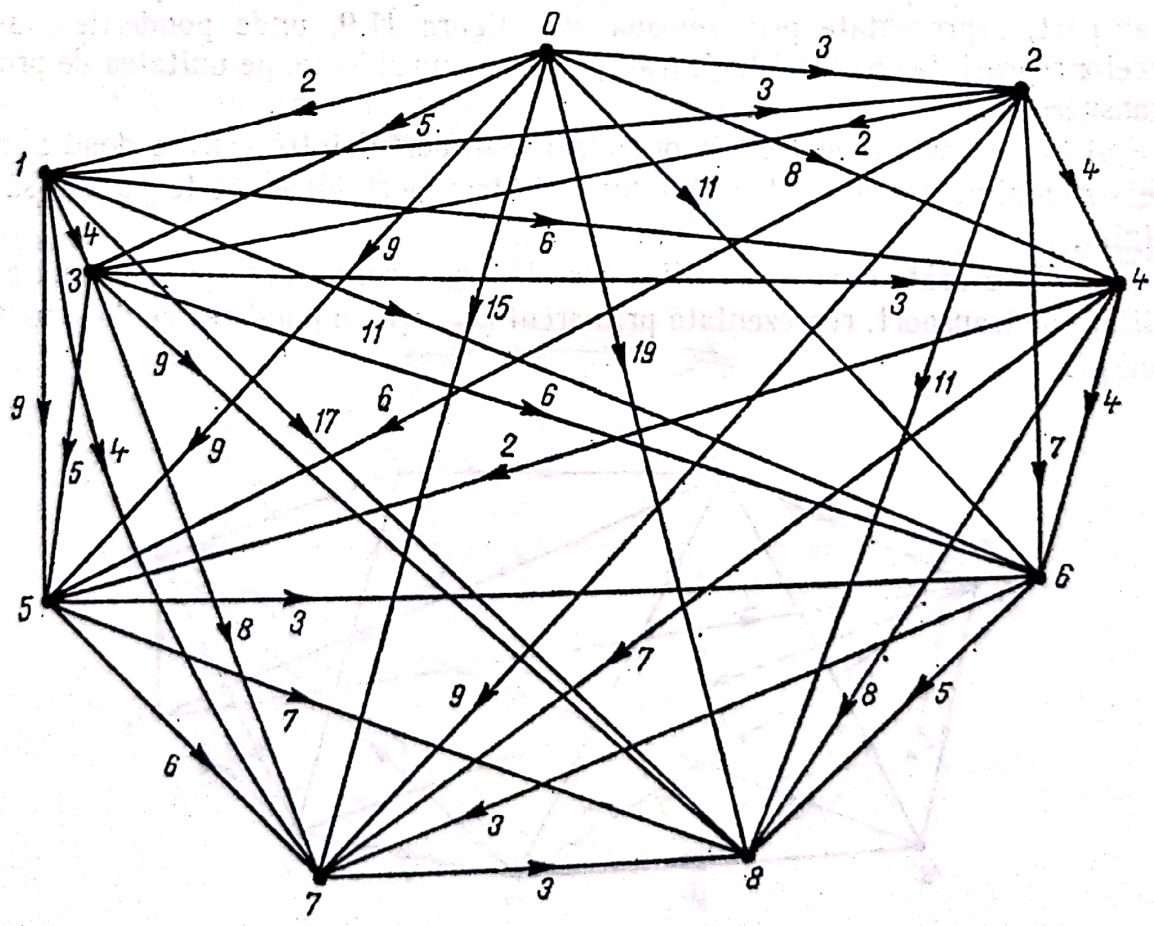


Fig. II.10

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se determine succesiunea anilor de înlocuire a mașinii, astfel încît cheltuielile totale probabile să fie minime.

Soluție: (0; 2; 8) sau (0; 2; 3; 8).

4. Pentru stabilirea unui plan de înlocuire a unei mașini, pe cinci ani, se folosesc datele din tabelul II.8, care conține cheltuielile probabile asupra unei mașini în funcțiune în anul i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, și care este înlocuită în anul j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Se presupune că, în fiecare an, întreprinderea are posibilitatea alegerii între două tipuri de mașini, notate în tabel prin a și b.

Tabelul II.8

	0	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b
0	0	2	3	6	9	8	10	12	15	15	16
1a		0		3	4	5	7	6	10	9	11
1b			0	3	4	5	6	8	10	12	13
2a				0		4	6	7	8	9	11
2b					0	2	5	6	8	9	10
3a						0		3	4	4	7
3b							0	4	6	7	8
4a								0		2	3
4b									0	3	5
5a										0	
5b											0

Să se întocmească un plan de înlocuire a mașinii astfel încît cheltuielile totale să fie minime.

Soluție: (0, 1a; 5a).

5. Pentru efectuarea unei construcții, sînt necesare unele operații, reprezentate prin arce în rețeaua din figura II.11. La arcele rețelei au fost atașate ponderi egale cu timpul mediu în care se pot efectua operațiile respective, în paranteze fiind dispersiile corespunzătoare.

a) Să se determine operațiile al căror timp de joc este nul.

b) Să se determine probabilitatea ca întreaga lucrare să se termine în 20 unități de timp.

Soluție. a) Operațiile sînt cele de pe drumul critic, care este următorul:

$$d = (x_1, x_2, x_3, x_7, x_{10}).$$

Valoarea drumului este de 17 unități.

b) 87%.

Scanned with OKEN Scanner

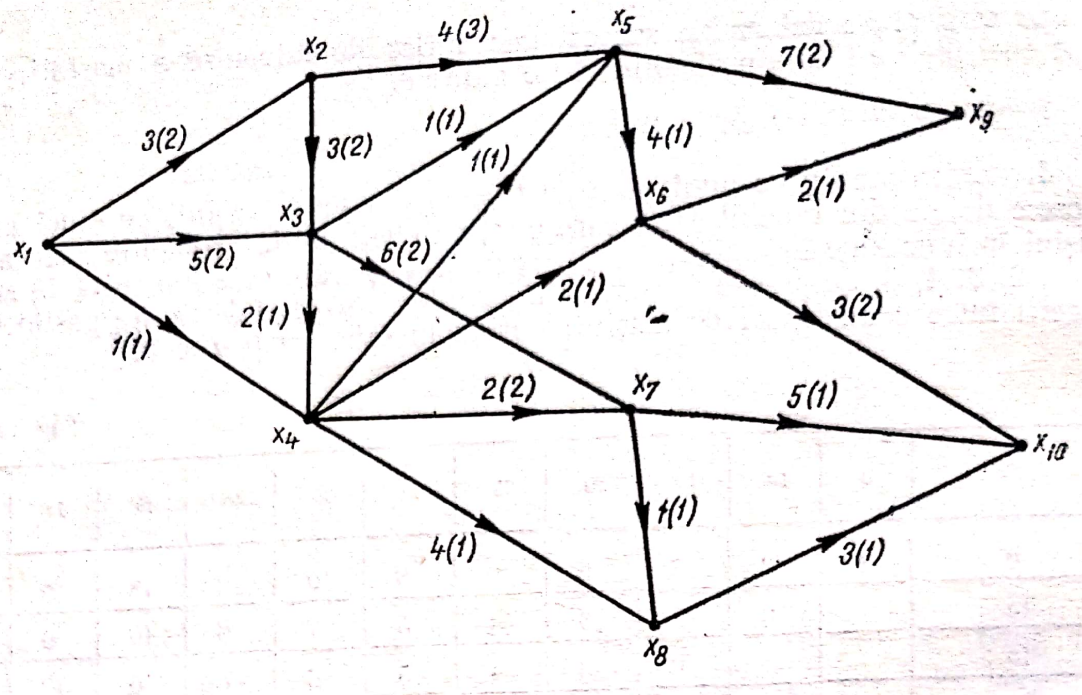


Fig. II.11

6. Să presupunem că rețeaua din figura II.12 descrie un sistem economic specific, ponderile de pe arc avînd semnificații legate de procesul economic descris.

a) Să se determine matricea M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei

b) Să se corecteze matricea M, dacă se mărește ponderea arcului (x_5, x_4) cu două unități.

Soluție: a) Matricea M este următoarea:

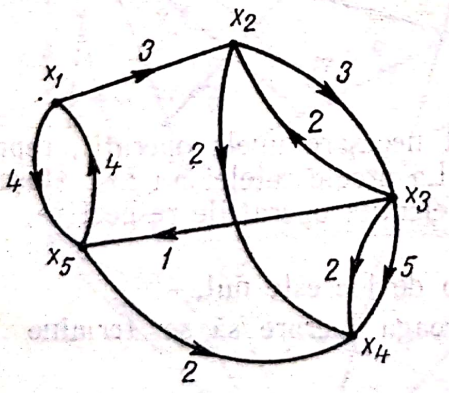


Fig. II.12

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	6	4	2
x_2	8	0	3	2	4
x_3	5	2	0	3	1
x_4	7	4	2	0	3
x_5	4	3	4	2	0

b) Se modifică numai patru elemente ale matricei M, ele căpătînd următoarele valori:

$$\tilde{m}_{14}=5;\ \tilde{m}_{34}=4;\ \tilde{m}_{53}=6;\ \tilde{m}_{54}=4.$$

§ 4. PROBLEME DE RUTE OPTIME TRECÎND PRIN NODURI SPECIFICATE

Introducere. O mare parte dintre problemele economice, ce se modelează cu ajutorul grafelor și rețelelor, conduc la așa-numita problemă a drumului hamiltonian, respectiv a drumului hamiltonian cu valoare optimă. După cum se știe, un drum hamiltonian este un drum ce trece prin toate vîrfurile unui graf (rețele), cîte o singură dată. În cele ce urmează, vom prezenta metode pentru determinarea drumurilor hamiltoniene, mai întîi în grafe fără circuite, apoi în grafe cu circuite.

Cercetarea existenței și determinarea drumului hamiltonian în grafe fără circuite. Uneori, chiar din conținutul problemei economice deducem că graful ce modelează fenomenul respectiv nu conține circuite, caz în care se poate cerceta cu ușurință existența sau inexistența unui drum hamiltonian în el. Metoda pe care o prezentăm folosește posibilitatea aranjării vîrfurilor unui graf fără circuite într-o ordine ce îndeplinește următoarea condiție: pentru orice arc (x_i, x_j) ce aparține grafului dat, originea x_i a arcului apare înaintea extremității x_j a acestui arc în ordinea stabilită. Orice ordine ce îndeplinește condiția enunțată o numim p-ordonare. Se arată că, dacă între vîrfurile unui graf fără circuite există o singură p-ordonare, acest graf conține un drum hamiltonian și numai unul singur, în caz contrar graful neconținînd nici un drum hamiltonian. Ordinea vîrfurilor în drumul hamiltonian, în cazul că el există, este dată de ordinea acestor vîrfuri în p-ordonarea respectivă. Cercetăm existența unei singure p-ordonări în acest graf. Algoritmul pe care îl prezentăm cere parcurgerea etapelor ce urmează:

Etapa 1. Dacă în matricea arcelor grafului dat există o singură coloană numai cu zerouri, vîrful corespunzător acestei coloane este primul vîrf al p-ordonării căutate. În cazul în care există mai multe coloane numai cu zerouri, graful dat nu conține nici un drum hamiltonian și algoritmul ia sfîrșit.

Etapa 2. Tăiem în matricea arcelor linia și coloana corespunzătoare vîrfului determinat la etapa precedentă și în submatricea obținută aplicăm din nou etapa întîi a algoritmului, pentru determinarea celui de al doilea vîrf al p-ordonării.

Etapele 1 și 2 se repetă consecutiv, pînă cînd toate vîrfurile grafului dat au intrat în p-ordonarea căutată sau pînă cînd obținem mai mult de o coloană numai cu zerouri, caz în care deducem că graful nu conține nici un drum hamiltonian.

Determinarea drumurilor hamiltoniene într-un graf cu circuite. Problema determinării tuturor drumurilor hamiltoniene într-un graf ce conține circuite este o problemă extrem de dificilă în general. Prezentăm o metodă ce se poate aplica cu succes numai în cazul în care graful dat conține un număr mare de componente tare conexe, fiecare cu număr mic de vîrfuri.

Etapa 1. Determinăm componentele tare conexe* ale grafului dat.

Etapa 2. Scriem matricea arcelor grafului redus**, corespunzător grafului dat, care — după cum se știe — nu are circuite.

---

* Vezi „Modele matematice de organizarea și conducerea producției" de I. Văduva, C. Dinescu, B. Săvulescu, Ed. Did. și Ped, 1974.

** Idem.

Scanned with OKEN Scanner

Etapa 3. Cercetăm existența unui drum hamiltonian în graful redus. În cazul în care un astfel de drum nu există, nici graful dat nu conține nici un drum hamiltonian. În caz contrar, trecem la etapa următoare.

Etapa 4. Aranjăm componentele tare conexe ale grafului în ordinea dictată de drumul hamiltonian găsit în graful redus. Păstrînd această ordine, aflăm drumurile hamiltoniene din fiecare componentă tare conexă, apoi le legăm cu ajutorul arcelor ce leagă componentele succesive, în cîte moduri acest lucru este posibil. Cu scopul de a aplica mai ușor ultimul pas al acestui algoritm, este bine să construim în prealabil un graf parțial al grafului dat, după regulile ce urmează. Fie graful dat notat cu G, iar graful redus corespunzător lui, notat cu G^*.

a) Considerăm componentele tare conexe ale grafului G, în ordinea dată de drumul hamiltonian din graful G^*. Reprezentăm vîrfurile primei componente tare conexe, componentă ce constituie primul vîrf al drumului hamiltonian din G^*, și trasăm toate arcele din G ce leagă aceste vîrfuri între ele. Procedăm la fel cu celelalte componente, reprezentîndu-le succesiv pe fiecare în parte.

b) Trasăm apoi toate arcele grafului G, ce leagă componentele consecutive: arcele ce pornesc din prima componentă spre a doua, arcele ce pornesc din cea de a doua componentă spre a treia și așa mai departe. Arcele lui G, ce leagă componentele tare conexe ce nu reprezintă vîrfuri consecutive în drumul hamiltonian al lui G^*, nu se trasează pe acest graf parțial.

Pe graful parțial obținut, se observă ușor atît drumurile hamiltoniene din fiecare componentă tare conexă, cît și legăturile posibile dintre ele.

Determinarea succesiunilor optime, care trebuie să treacă prin anumite vîrfuri ale unei rețele fără circuite. În multe probleme practice, este nevoie să se determine drumul optim (de valoare maximă sau minimă) dintre două vîrfuri ale unei rețele, drum care să treacă în mod obligatoriu prin anumite vîrfuri ale rețelei.

Fie o rețea R fără circuite, cu n vîrfuri, iar x_1 și x_n două vîrfuri ale sale, între care există unul sau mai multe drumuri. Dintre aceste drumuri, ne interesează numai acelea ce trec prin vîrfuri fixate, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, indiferent de ordinea în care sînt parcurse aceste vîrfuri. În sfîrșit, dintre aceste drumuri, de la x_1 la x_n, ne propunem să le găsim pe cele cu valoare minimă sau maximă. Problema se poate rezolva parcurgînd etapele ce urmează:

Etapa 1. Scriem vîrfurile fixate, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, împreună cu vîrfurile x_1 și x_n, într-o ordine descrescătoare a puterilor de atingere, sub forma:

$$x_1, x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_k}, x_n.$$

Dacă o astfel de ordine nu există, problema dată este imposibilă. În caz contrar, trecem la etapa următoare.

Etapa 2. Calculăm matricea $\mathfrak{M}$ (respectiv M) ale cărei elemente sînt egale cu valorile maxime (respectiv minime) ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei date.

Etapa 3. Cu ajutorul matricei $\mathfrak{M}$ (respectiv M), dedusă la etapa precedentă determinăm drumurile optime de la x_1 la x_{s_1}, de la x_{s_1} la x_{s_2} ș.a.m.d., ale căror succesiuni de vîrfuri le punem apoi în continuare, păstrînd ordinea impusă de

Scanned with OKEN Scanner

etapa 1 și fără să repetăm capetele x_{s_1}, x_{s_2} ,...,x_{s_k} ale acestor drumuri. Se obține astfel drumul optim căutat, care va fi evident un drum elementar, datorită faptului că rețeaua R nu conține circuite.

Determinarea succesiunilor optime care trebuie să treacă prin anumite vîrfuri fixate al unei rețele cu circuite este mai complicată, deoarece în acest caz, între vîrfurile rețelei nu se mai poate introduce o relație de ordine. Pe de altă parte, datorită faptului că rețeaua are circuite, nu se mai poate pune decît problema drumului de valoare minimă ce trece prin vîrfurile fixate. Fie o rețea R, cu n vîrfuri, iar x_1 și x_n două vîrfuri ale sale. Să căutăm drumul de valoare minimă de la x_1 la x_n în rețea, drum care să treacă în mod obligatoriu prin vîrfurile:

$$x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_k},$$

fixate anterior. Dacă ordinea în care trebuie parcurse cele k vîrfuri fixate este stabilită anterior, problema se rezolvă ca și în cazul rețelei fără circuite, cu deosebirea că drumul obținut poate să nu mai fie elementar. În cazul în care se pune doar condiția ca drumul să treacă prin cele k vîrfuri, fără a se stabili ordinea trecerii prin ele, va trebui să cercetăm toate posibilitățile de trecere prin cele k vîrfuri, rezolvînd problema dată pentru fiecare dintre cele k posibilități de aranjare a vîrfurilor fixate. Acest lucru este convenabil în cazul în care se fixează un număr mic de vîrfuri prin care să treacă drumul căutat, caz în care dintre rezultatele obținute se alege cel care conduce la un drum de valoare minimă cît mai mică.

§ 5. PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Asupra unei piese trebuie efectuate opt operații, notate cu x_1, x_2,...,x_8. Condițiile tehnice sînt respectate în mod ideal dacă se ține seama de următoarele:

— operația x_1 este efectuată înaintea operațiilor x_2 și x_5,
— operația x_2 este efectuată înaintea operației x_4,
— operația x_3 este efectuată înaintea operațiilor x_2, x_4, x_7 și x_8,
— operația x_4 este ultima operație ce se efectuează,
— operația x_5 este efectuată înaintea operațiilor x_4 și x_6,
— operația x_6 este efectuată înaintea operației x_2,
— operația x_7 este efectuată înaintea operațiilor x_1, x_2, x_5, x_6 și x_8,
— operația x_8 este efectuată înaintea operațiilor x_1 și x_2.

Să se cerceteze dacă cele opt operații pot fi efectuate în așa fel încît să fie respectate în mod ideal condițiile tehnice, indicîndu-se și ordinea respectivă.

Rezolvare. Considerînd cele opt operații ca vîrfuri ale unui graf și reprezentînd faptul că operația x_i, $i = 1, 2,\ldots,8$, trebuie efectuată înaintea operației x_j, $j = 1, 2,\ldots,n$, printr-un arc (x_i, x_j), obținem modelul graf din figura II.13, în care cercetarea respectării condițiilor tehnice se pune sub forma

Scanned with OKEN Scanner

cercetării existenței unui drum hamiltonian. Din conținutul economic al problemei rezultă că graful din figura II.13 nu are circuite, deoarece în caz contrar ar exista o operație ce ar trebui efectuată înaintea ei însăși. Vom aplica deci algoritmul corespunzător acestui tip de grafe.

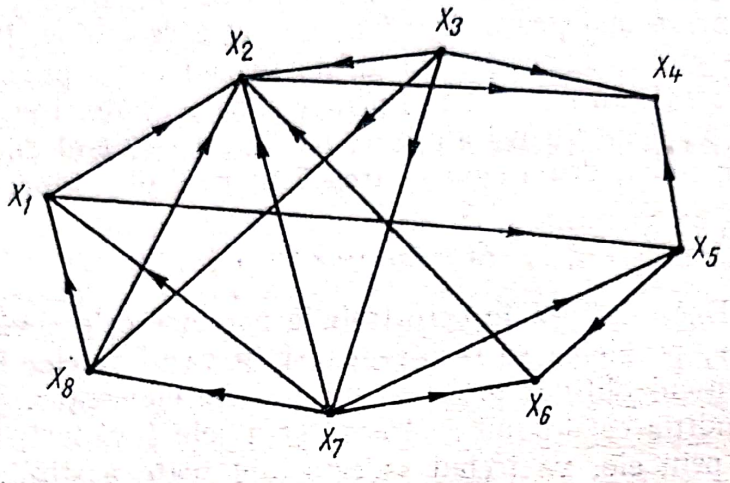


Fig. II.13

Matricea arcelor grafului de mai sus este următoarea:

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	1	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	0	0	0
x_7	1	1	0	0	1	1	0	1
x_8	1	1	0	0	0	0	0	0

Deoarece coloana x_3 este singura coloană numai cu zerouri a matricei A, rezultă că x_3 este primul vîrf al p-ordonării atașate grafului (în ipoteza că există o astfel de p-ordonare unică). Tăind linia și coloana corespunzătoare vîrfului x_3, matricea A capătă forma următoare:

(A_1)

	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	0	0
x_7	1	1	0	1	1	0	1
x_8	1	1	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Singura coloană cu toate elementele nule în matricea A_1 este coloana x_7, deci vîrful x_7 este cel de al doilea vîrf al p-ordonării căutate. Tăind linia şi coloana corespunzătoare acestui vîrf din matricea A_1, obţinem matricea A_2, ce urmează:

(A_2)

	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	x_8
x_1	0	1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	1	0
x_6	0	1	0	0	0	0
x_8	1	1	0	0	0	0

Coloana x_8 este cea care are toate elementele nule în matricea A_2, deci x_8 este cel de al treilea vîrf al p-ordonării urmărite. Tăind linia şi coloana x_8 din matricea A_2, obţinem matricea:

(A_3)

	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	1	0
x_2	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	1
x_6	0	1	0	0	0

Coloana x_1 avînd zerouri, rezultă că x_1 este al patrulea vîrf al p-ordonării căutate. Dacă tăiem din A_3 linia şi coloana corespunzătoare lui x_1, obţinem matricea următoare:

(A_4)

	x_2	x_4	x_5	x_6
x_2	0	1	0	0
x_4	0	0	0	0
x_5	0	1	0	1
x_6	1	0	0	0

Cercetînd această matrice, deducem că în p-ordonarea căutată, vîrful x_5 succede vîrfului x_1. Tăind linia şi coloana x_5 din matricea A_4, obţinem matricea A_5:

(A_5)

	x_2	x_4	x_6
x_2	0	1	0
x_4	0	0	0
x_6	1	0	0

Stabilind că x_6 este vîrful ce urmează lui x_5 în p-ordonarea ataşată grafului, ajungem la matricea următoare:

(A_6)

	x_2	x_4
x_2	0	1
x_4	0	0

din care se observă direct că ultimele două vîrfuri ale acestei p-ordonări sînt în ordine x_2 şi x_4.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece de fiecare dată, vîrful ccrespunzător ce urmează în p-ordonarea căutată a fost determinat în mod unic, rezultă că grafului folosit îi corespunde o singură p-ordonare, deci el conține un drum hamiltonian. Acest drum se scrie acum ușor, vîrfurile grafului succedîndu-se în el conform p-ordonării unice găsite:

$$d_H = (x_3, x_7, x_8, x_1, x_5, x_6, x_2, x_4).$$

Ordinea în care se succed vîrfurile în acest drum indică și ordinea în care trebuie efectuate cele opt operații, pentru a respecta condițiile tehnice în mod ideal.

Problema 2. Un revizor trebuie să controleze șase unități din șase localități diferite notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_6$. El are planificată verificarea celor șase unități în aceeași săptămînă, cîte una pe zi. Dorește să plece din fiecare localitate către următoarea dimineața, între orele șase și șapte, pentru a avea timp suficient pentru control. Consultînd mersul trenurilor și al mașinilor, observă că poate folosi următoarele legături ce corespund dorințelor lui:

— de la localitatea x_1 către localitatea x_6,
— de la localitatea x_2 către localitatea x_1,
— de la localitatea x_3 către localitatea x_2 sau x_4,
— de la localitatea x_4 către localitatea x_1 sau x_2,
— de la localitatea x_5 către localitățile x_1, x_2, x_4 sau x_6.

Să se arate dacă el poate parcurge toate cele șase localități conform preferințelor lui și în ce ordine trebuie să facă acest lucru.

Rezolvare. Reprezentînd cele șase localități ca vîrfurile unui graf și existența unei legături — conform dorințelor lui — de la localitatea x_i la localitatea x_j ca pe un arc (x_i, x_j), obținem graful din figura II.14. Pentru ca revizorul să poată parcurge toate cele șase localități conform dorințelor lui, trebuie să existe în acest graf un drum hamiltonian. Matricea arcelor grafului este următoarea:

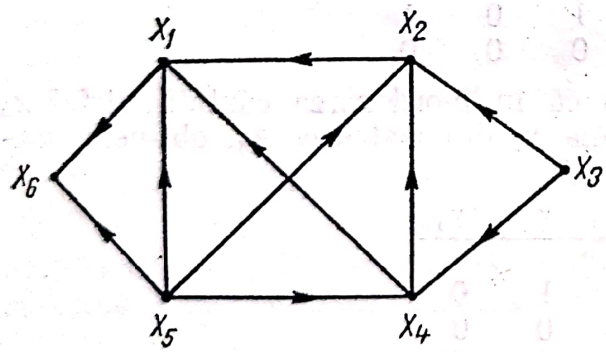


Fig. II. 14

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	1
x_2	1	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0
x_4	1	1	0	0	0	0
x_5	1	1	0	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0

Se observă ușor că graful nu conține circuite, fie direct pe figură, fie calculînd matricea drumurilor, care va avea toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero. Această observație rezultă însă și direct din aplicarea algoritmului ce urmează, prin faptul că de fiecare dată există cel puțin cîte o coloană cu toate elementele egale cu zero. În matricea A există două astfel de coloane, deci grafului folosit nu îi corespunde o singură p-ordonare. În consecință, graful nu conține nici un drum hamiltonian, iar revizorul nu poate parcurge toate cele

Scanned with OKEN Scanner

șase localități conform dorințelor lui. Să cercetăm ce arce trebuie adăugate rețelei (bineînțeles cît mai puține), astfel încît ea să conțină un drum hamiltonian. Deoarece de la început există două coloane, x_3 și x_5, care au toate elementele nule, vom face să rămînă numai o coloană de acest fel dintre ele, adăugînd grafului arcul (x_3, x_5) sau arcul (x_5, x_3).

Să considerăm mai întîi cazul în care se adaugă grafului arcul (x_3, x_5), caz în care matricea arcelor grafului obținut capătă următoarea formă:

(A^1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	1
x_2	1	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	1	0
x_4	1	1	0	0	0	0
x_5	1	1	0	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0

Aplicînd algoritmul de determinare a p-ordonării în acest graf, se obține o singură p-ordonare, dată de succesiunea următoare:

$$x_3,\ x_5,\ x_4,\ x_2,\ x_1,\ x_6.$$

Graful va avea în acest caz un drum hamiltonian, de forma:

$$d_H^1 = (x_3,\ x_5,\ x_4,\ x_2,\ x_1,\ x_6).$$

În cel de al doilea caz, cînd se adaugă grafului arcul (x_5, x_3), matricea arcelor grafului obținut are forma următoare:

(A^2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	1
x_2	1	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0
x_4	1	1	0	0	0	0
x_5	1	1	1	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0

Aplicînd și aici algoritmul respectiv, se găsește o singură p-ordonare, care conduce la următorul drum hamiltonian:

$$d_H^2 = (x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_2,\ x_1,\ x_6).$$

Rezultă deci că prin adăugarea unui singur arc, (x_3, x_5), respectiv (x_5, x_3), problema devine posibilă. Va trebui deci ca revizorul să cerceteze care dintre cele două legături, de la x_3 la x_5, sau de la x_5 la x_3, este acceptabilă (bineînțeles nu ideală, ca în condițiile inițiale) și conform acestei hotărîri să folosească unul din cele două drumuri hamiltoniene obținute, d_H^1, respectiv d_H^2.

Problema 3. Pentru a organiza transportul poștei prin nouă localități, notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_9$, se încearcă folosirea posibilităților de transport reprezentate prin arce în graful din figura II.15.

Scanned with OKEN Scanner

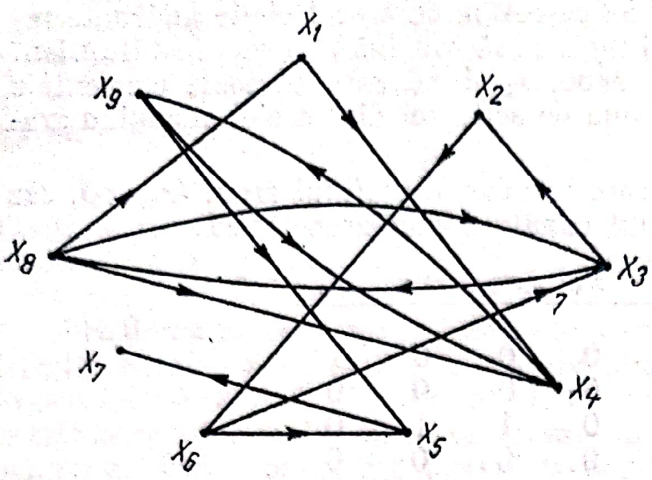


Fig. II.15

Să se arate dacă este posibilă trecerea prin toate cele nouă localităţi cîte o singură dată, în caz afirmativ indicîndu-se din ce localitate trebuie pornit şi în ce ordine trebuie parcurse celelalte localităţi.

Rezolvare. Va trebui să determinăm drumurile hamiltoniene în graful dat. Deoarece el conţine circuite, vom determina mai întîi componentele lui tare conexe. Calculele necesare sînt redate în tabelul II.9 şi în operaţiile cu mulţimi ce urmează:

(C_1): $(V_1 \cap V_1') \cup \{x_1\} = [\{x_4, x_5, x_7, x_9\} \cap \{x_2, x_3, x_6, x_8\}] \cup \{x_1\} = \{x_1\}$.

(C_2): $(V_2 \cap V_2') \cup \{x_2\} = [\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\} \cap \{x_2, x_3, x_6, x_8\}] \cup \{x_2\} = \{x_2, x_3, x_6, x_8\}$.

(C_3): $(V_3 \cap V_3') \cup \{x_4\} = [\{x_4, x_5, x_7, x_9\} \cap \{x_4, x_9\}] \cup \{x_4\} = \{x_4, x_9\}$.

(C_4): $(V_4 \cap V_4') \cup \{x_5\} = [\{x_7\} \cap \Phi] \cup \{x_5\} = \{x_5\}$.

(C_5): $(V_5 \cap V_5') \cup \{x_7\} = (\Phi \cap \Phi) \cup \{x_7\} = \{x_7\}$.

Tabelul II.9

x_i / x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	V_1'	V_2'	V_3'	V_4'	V_5'
x_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	//////	//////	//////	//////
x_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	//////	//////	//////
x_3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	//////	//////	//////
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	//////	//////
x_5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	//////
x_6	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	//////	//////	//////
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_8	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	//////	//////	//////
x_9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	//////	//////
V_1	0	0	0	1	1	0	1	0	1					
V_2	////	1	1	1	1	1	1	1	1					
V_3	////	////	////	1	1	////	1	////	1					
V_4	////	////	////	////	0	////	1	////	////					
V_5	////	////	////	////	////	////	0	////	////					

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea matricei arcelor grafului condensat, condensăm mai întîi coloanele matricei A și obținem matricea intermediară ce urmează:

$(\tilde{A})$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
x_1	0	0	1	0	0
x_2	0	1	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0

Condensăm apoi liniile din matricea intermediară A și obținem:

$(\tilde{A})$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	0	0	1	0	0
C_2	1	1	1	1	0
C_3	0	0	1	1	0
C_4	0	0	0	0	1
C_5	0	0	0	0	0

În sfîrșit, înlocuind elementele egale cu unu de pe diagonala principală prin zero, obținem matricea A^* ce urmează:

(A^*)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	0	0	1	0	0
C_2	1	0	1	1	0
C_3	0	0	0	1	0
C_4	0	0	0	0	1
C_5	0	0	0	0	0

Deoarece graful G^* nu are circuite, aplicăm algoritmul corespunzător acestui tip de grafe și determinăm următorul drum hamiltonian în el:

$$d_H^* = (C_2,\ C_1,\ C_3,\ C_4,\ C_5).$$

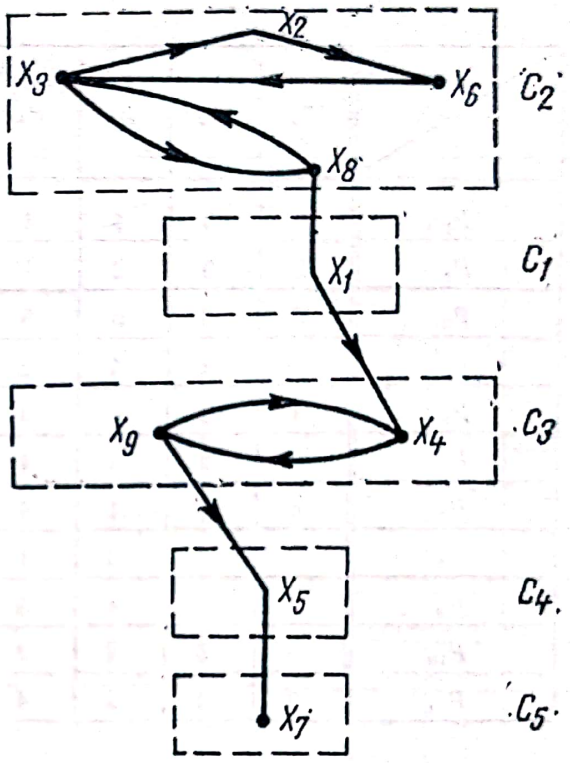
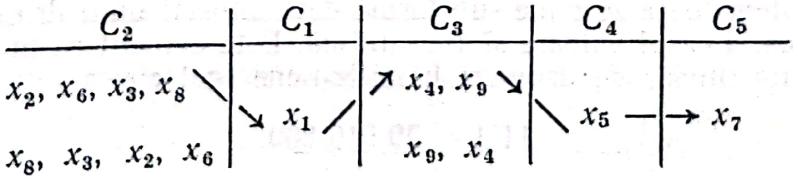


Fig. II.16

Graful parțial al graficului G, cu toate arcele ce leagă vîrfurile din aceeași componentă tare conexă, precum și cele ce leagă componentele succesive din d_H^* este redat în figura II.16.

Drumurile hamiltoniene în fiecare componentă tare conexă și legăturile dintre ele, conform lui d_H^*, sînt redate în schema de mai jos:



Din această schemă rezultă clar existența în graful G a unui singur drum hamiltonian și anume:

$$d_H = (x_2,\ x_6,\ x_3,\ x_8,\ x_1,\ x_4,\ x_9,\ x_5,\ x_7).$$

Această succesiune arată ordinea în care trebuie parcurse cele nouă localități.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 4. O întreprindere trebuie să fabrice într-o lună, conform comenzilor existente, 11 tipuri de produse, notate prin P_1, P_2, P_3,...,P_{11}. Întreprinderea are posibilitatea de a fabrica toate aceste tipuri de produse în luna respectivă, dar ordinea în care le fabrică are influență asupra prețului de cost, deoarece pregătirile de trecere de la fabricarea unui produs la fabricarea altui produs cer anumite cheltuieli (numite cheltuieli de lansare), ce depind de produsele respective. În tabelul II.10 sînt date cheltuielile de lansare corespunzătoare trecerii de la fabricarea produsului P_i, $i = 1, 2,...,11$, la fabricarea produsului P_j, $j = 1, 2,...,11$.

Tabelul II.10

P_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
P_1	0	3	4	4	3	5	2	2	3	4	4
P_2	2	0	2	1	3	5	2	2	3	2	3
P_3	5	3	0	5	4	5	5	2	3	4	4
P_4	2	4	4	0	2	2	2	3	4	3	4
P_5	4	4	4	3	0	3	3	2	4	4	4
P_6	2	2	3	4	2	0	3	4	4	2	2
P_7	4	4	4	4	1	5	0	2	1	4	2
P_8	2	3	3	4	3	5	3	0	3	5	6
P_9	4	5	4	5	3	5	3	4	0	3	5
P_{10}	3	3	2	2	2	3	3	4	2	0	5
P_{11}	3	4	2	4	1	4	4	5	4	6	0

Să se determine ordinea în care trebuie fabricate cele 11 tipuri de produse, astfel ca suma cheltuielilor de lansare să fie cît mai mică.

Rezolvare. Considerăm cele 11 produse ca vîrfuri ale unei rețele, astfel ca între oricare două vîrfuri, P_i și P_j, să existe arcele (P_i, P_j) și (P_j, P_i). Ponderea atașată unui arc (P_i, P_j) o vom considera egală cu costul de lansare corespunzător trecerii de la fabricarea produsului P_i la fabricarea produsului P_j. În acest fel, problema dată se pune sub forma determinării unui drum hamiltonian în această rețea, a cărui valoare să fie minimă. Este evident că în rețeaua specificată există un număr de drumuri hamiltoniene egal cu:

$$11\ ! = 39\ 916\ 800.$$

Cercetarea directă a acestor drumuri, pentru a extrage pe cele de valoare minimă, este practic imposibilă. De aceea, vom renunța la unele arce din rețea, căutînd drumurile hamiltoniene în rețeaua parțială rămasă pe care o notăm cu R; mai precis, dintre arcele (P_i, P_j) și (P_j, P_i), $i, j = 1, 2, 3,...,11$, vom renunța la cel cu ponderea mai mare, păstrînd pe cel cu ponderea mai mică (în caz de

Scanned with OKEN Scanner

egalitate a ponderilor, păstrăm prin convenție unul dintre ele). În acest fel, numărul arcelor se reduce la jumătate. Un drum hamiltonian de valoare minimă în rețeaua parțială R obținută coincide, dacă nu chiar cu un drum hamiltonian de valoare minimă din rețeaua inițială, cel puțin cu unul foarte apropiat ca valoare de acesta. Matricea arcelor rețelei parțiale R, împreună cu calculele necesare determinării componentelor tare conexe ale acestei rețele, se găsesc în tabelul II.11 și în operațiile cu mulțimi ce urmează:

C_1: $(V_1 \cap V_1') \cup \{P_1\} = \{P_1, P_7, P_{11}\}$,
C_2: $(V_2 \cap V_2') \cup \{P_2\} = \{P_2, P_4, P_6, P_{10}\}$,
C_3: $(V_3 \cap V_3') \cup \{P_3\} = \{P_3\}$,
C_4: $(V_4 \cap V_4') \cup \{P_5\} = \{P_5, P_8, P_9\}$.

Tabelul II.11

P_j \ P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	/////	/////	/////
P_2	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	/////	/////
P_3	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	/////
P_4	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	/////	/////
P_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	/////
P_6	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	/////	/////
P_7	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	/////	/////	/////
P_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
P_9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
P_{10}	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	/////	/////
P_{11}	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	/////	/////	/////
V_1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1				
V_2	////	1	1	1	1	1	////	1	1	1	////				
V_3	////	////	0	////	1	////	////	1	1	////	////				
V_4	////	////	////	////	1	////	////	1	1	////	////				

Matricea arcelor rețelei condensate corespunzătoare rețelei R este următoarea:

(A^*)

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	0	0	1	1
C_2	1	0	1	1
C_3	0	0	0	1
C_4	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece această rețea condensată nu are circuite, aplicăm algoritmul corespunzător acestui tip de rețele și determinăm în ea următorul drum hamiltonian:

$$d_H^* = (C_2, C_1, C_3, C_4).$$

Rețeaua parțială ajutătoare scrierii tuturor drumurilor hamiltoniene din R este reprezentată în figura II. 17, din care deducem următoarea schemă ce conține drumurile hamiltoniene din fiecare componentă tare conexă:

C_2	C_1	C_3	C_4
P_2, P_4, P_6, P_{10}			P_5, P_8, P_9
P_2, P_{10}, P_4, P_6	P_1, P_7, P_{11}		P_8, P_9, P_5
P_4, P_6, P_2, P_{10}	P_7, P_{11}, P_1	P_3	P_9, P_5, P_8
P_6, P_2, P_{10}, P_4	P_{11}, P_1, P_7		
P_{10}, P_4, P_6, P_2			

Din figura II.17 se vede că există arce de legătură între aceste drumuri astfel încît să se poată forma 45 de drumuri hamiltoniene, existente în rețeaua R. Pentru fiecare drum hamiltonian dintre acestea, calculăm valoarea lui, adunînd ponderile arcelor din care este constituit. Dăm ca exemplu calculul valorilor corespunzătoare pentru două dintre aceste drumuri. Fie, de pildă, drumul hamiltonian:

$$(P_2, P_4, P_6, P_{10}, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_5, P_8, P_9),$$

format din succesiunea următoarelor arce: (P_2, P_4), (P_4, P_6), (P_6, P_{10}), (P_{10}, P_1), (P_1, P_7), (P_7, P_{11}), (P_{11}, P_3), (P_3, P_5), (P_5, P_8) și (P_8, P_9). Adunînd ponderile acestor arce, obținem valoarea drumurilor menționate, egală cu:

$$1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 3 = 23.$$

Pentru drumul hamiltonian $(P_2, P_4, P_6, P_{10}, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_8, P_9, P_5)$, obținem următoarea valoare:

$$1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 22.$$

Comparînd valorile celor 45 drumuri hamiltoniene, observăm că există opt drumuri de acest fel cu aceeași valoare minimă, egală cu 22. Aceste drumuri sînt următoarele:

$$d_H^1 = (P_2, P_4, P_6, P_{10}, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_8, P_9, P_5),$$
$$d_H^2 = (P_2, P_4, P_6, P_{10}, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_9, P_5, P_8),$$
$$d_H^3 = (P_2, P_{10}, P_4, P_6, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_8, P_9, P_5),$$
$$d_H^4 = (P_2, P_{10}, P_4, P_6, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_9, P_5, P_8),$$
$$d_H^5 = (P_6, P_2, P_{10}, P_4, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_8, P_9, P_5),$$
$$d_H^6 = (P_6, P_2, P_{10}, P_4, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_9, P_5, P_8),$$
$$d_H^7 = (P_{10}, P_4, P_6, P_2, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_8, P_9, P_5),$$
$$d_H^8 = (P_{10}, P_4, P_6, P_2, P_1, P_7, P_{11}, P_3, P_9, P_5, P_8).$$

Scanned with OKEN Scanner

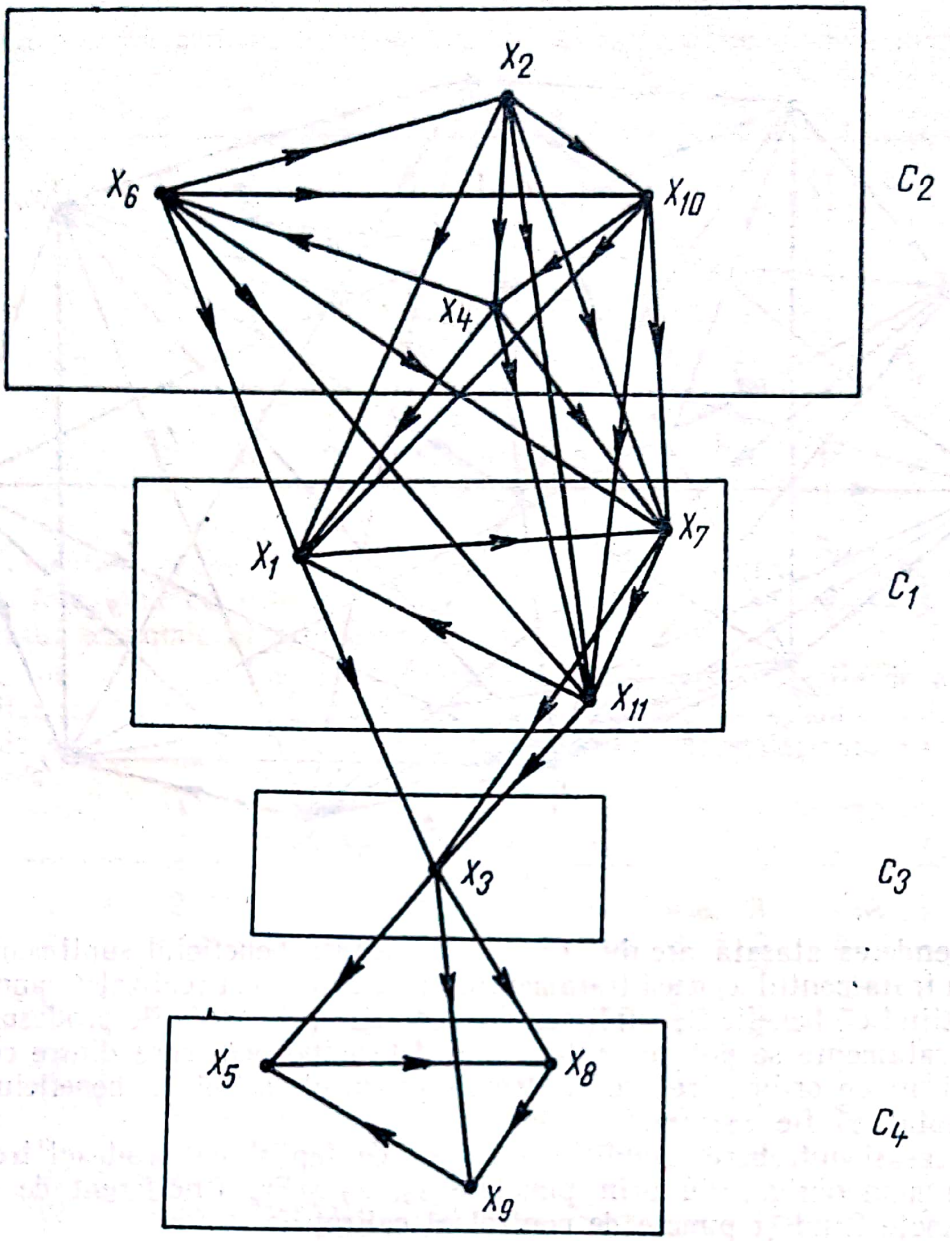


Fig. II.17

Întreprinderea va trebui să lanseze în producţie cele 11 tipuri de produse în ordinea dată de oricare dintre cele opt drumuri hamiltoniene de mai sus. Alegerea unuia dintre aceste drumuri se va face după alte criterii sau la întîmplare.

Problema 5. În prelucrarea sa, un produs poate trece pe la unele dintre cele zece puncte, notate cu x_1, x_2,...,x_{10}, în care se fac anumite tratamente speciale asupra sa, tratamente ce dau produsului noi calităţi, astfel încît se adaugă la beneficiul net, realizat prin fabricarea unei unităţi de produs, anumite beneficii suplimentare. Ordinea în care se aplică aceste tratamente nu este însă indiferentă, existînd nişte condiţii reprezentate simbolic în reţeaua R din figura II.18 în modul următor:

— faptul că tratamentul efectuat în punctul x_i poate precede tratamentul efectuat în punctul x_j este reprezentat printr-un arc (x_i, x_j) în această reţea;

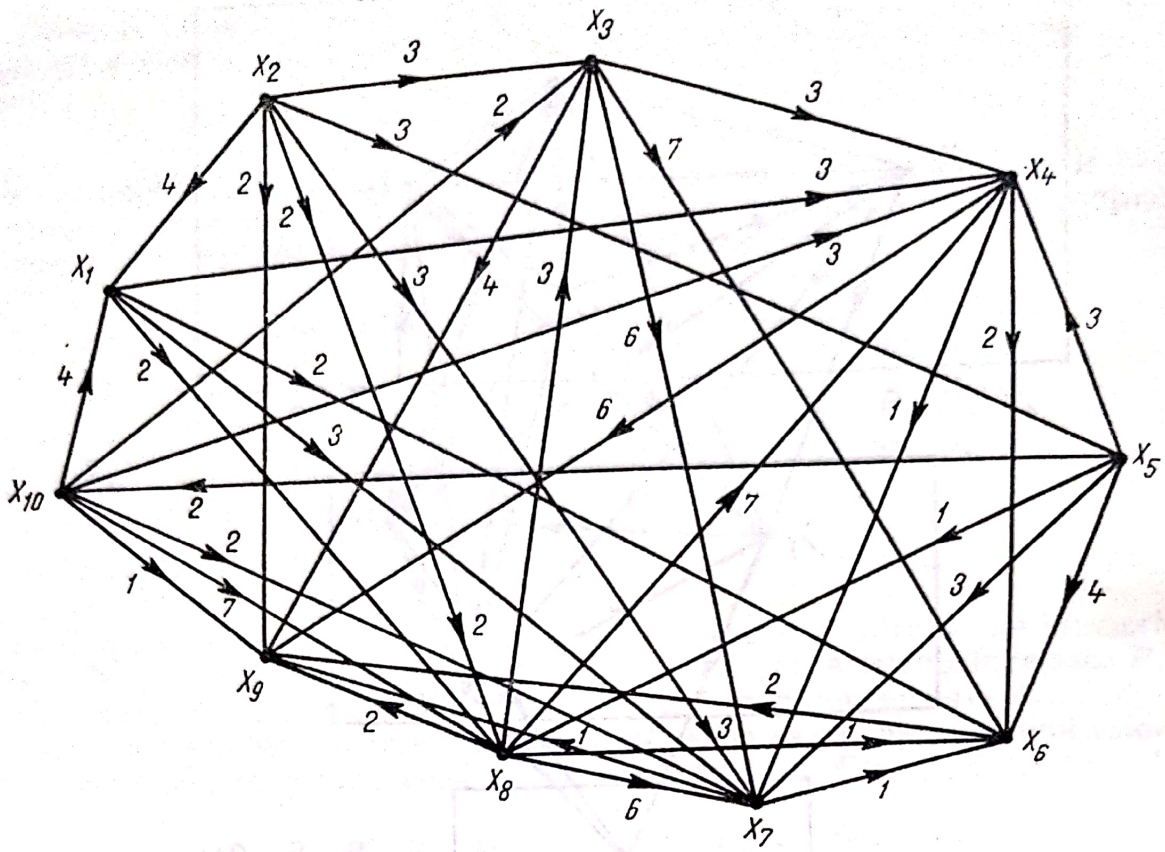


Fig. II.18

— ponderea atașată arcului (x_i, x_j) reprezintă beneficiul suplimentar realizat prin tratamentul x_j dacă tratamentul precedent a fost realizat în punctul x_i.

a) Știind că beneficiile suplimentare realizate prin trecerile produsului prin diferite tratamente se pot cumula, să se determine prin care dintre cele zece puncte și în ce ordine trebuie să treacă produsul, astfel ca beneficiul suplimentar total să fie maxim.

b) Aceeași întrebare, condiționată însă de faptul că produsul trebuie să treacă în mod obligatoriu prin punctele x_5, x_7 și x_8 (indiferent de ordine), aceste puncte fiind și puncte de control al calității.

Rezolvare:

a) Matricea arcelor rețelei R este următoarea:

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
x_2	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
x_3	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
x_4	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
x_5	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
x_8	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0

Scanned with OKEN Scanner

Din această matrice se deduce matricea drumurilor de mai jos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
	x_1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	6
	x_2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9
	x_3	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	4
	x_4	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	3
(D)	x_5	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	8
	x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	x_7	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
	x_8	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	5
	x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x_{10}	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	7

Elementele de pe diagonala principală a acestei matrice sînt toate nule, ceea ce înseamnă că rețeaua R nu are circuite, fapt ce rezultă și direct din conținutul economic al problemei.

Pe marginea din dreapta a matricei D, sînt scrise puterile de atingere ale vîrfurilor corespunzătoare liniilor, fiecare dintre ele fiind egală cu suma elementelor de pe linia respectivă. Matricea ponderilor triangularizată va fi deci următoarea:

		x_2	x_5	x_{10}	x_1	x_8	x_3	x_4	x_7	x_6	x_9
	x_2	0	3	$-\infty$	4	2	3	$-\infty$	3	$-\infty$	2
	x_5	$-\infty$	0	2	$-\infty$	1	$-\infty$	3	3	4	$-\infty$
	x_{10}	$-\infty$	$-\infty$	0	4	7	2	3	2	$-\infty$	1
	x_1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2	$-\infty$	3	3	2	$-\infty$
(L')	x_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	3	7	6	1	2
	x_3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	3	6	7	4
	x_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1	2	6
	x_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1	1
	x_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2
	x_9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Folosind această matrice, putem găsi matricea M, ale cărei elemente sînt egale cu lungimile maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei R. Această matrice se găsește în tabelul II.12. Cel mai mare element al matricei M este egal cu 25 și corespunde următorului drum de la vîrful x_2 la vîrful x_9:

$$d_{max}\,(x_2,\ x_9) = (x_2,\ x_5,\ x_{10},\ x_8,\ x_4,\ x_9).$$

Produsul va trebui să treacă deci succesiv pe la punctele indicate de acest drum, ceea ce va conduce la un beneficiu unitar suplimentar maxim de 25 u.b.

b) Cele trei puncte, prin care trebuie să treacă în mod obligatoriu produsul, puse în ordinea strict descrescătoare a puterilor de atingere, formează următoarea succesiune:

$$x_5,\ x_8,\ x_7.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.12

(M)

	x_2	x_5	x_{10}	x_1	x_8	x_3	x_4	x_7	x_6	x_9
x_2	0	3 (2)	5 (5)	9 (10)	12 (10)	15 (8)	19 (8)	21 (3)	22 (3;7)	25 (4)
x_5	$-\infty$	0	2 (5)	6 (10)	9 (10)	12 (8)	16 (8)	18 (3)	19 (3;7)	22 (4)
x_{10}	$-\infty$	$-\infty$	0	4 (10)	7 (10)	10 (8)	14 (8)	16 (3)	17 (3;7)	20 (4)
x_1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2 (1)	5 (8)	9 (8)	11 (3)	12 (3;7)	15 (4)
x_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	3 (8)	7 (8)	9 (3)	10 (3;7)	13 (4)
x_3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	3 (3)	6 (3)	7 (3;7)	9 (4;6)
x_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1 (4)	2 (4;7)	6 (4)
x_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1 (7)	3 (6)
x_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2 (6)
x_9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Un drum cu valoare maximă, care trece prin aceste vîrfuri, trebuie evident să pornească din vîrful x_2 (singurul cu putere de atingere mai mare decît x_5) și să se sfîrșească cu unul din vîrfurile x_6 sau x_9 (singurele cu putere de atingere mai mică decît x_7). Dintre cele două alternative care au apărut, vom alege pe cea de a doua, deoarece este mai convenabil să mergem de la x_7 la x_9, de cît de la x_7 la x_6 ($M_{79} = 3$, iar $M_{76} = 1$). Din tabelul II.16, extragem următoarele drumuri optime:

$$d_{\max}(x_2, x_5) = (x_2, x_5), \text{ de valoare 3,}$$
$$d_{\max}(x_5, x_8) = (x_5, x_{10}, x_8), \text{ de valoare 9,}$$
$$d_{\max}(x_8, x_7) = (x_8, x_3, x_7), \text{ de valoare 9,}$$
$$d_{\max}(x_7, x_9) = (x_7, x_6, x_9), \text{ de valoare 3.}$$

Cuplînd aceste drumuri, fără a repeta extremitățile, obținem următorul drum ce răspunde problemei:

$$d = (x_2, x_5, x_{10}, x_8, x_3, x_7, x_6, x_9),$$

de valoare egală cu 25 unități. Prin punctele indicate de acest drum trebuie să treacă produsul succesiv, obținîndu-se un beneficiu unitar suplimentar maxim de 25 u.b.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 6. Pentru transportul unui produs de la localitatea x_1 la localitatea x_9 se pot alege diferite rute care pot trece prin unele din cele opt localităţi intermediare, notate cu x_2, x_3, x_4, x_8. Deoarece anumite linii sînt aglomerate (în ambele sensuri sau într-unul), s-a renunţat la considerarea lor, rămînînd posibile numai cele ce sînt reprezentate prin arce în reţeaua R din figura II.19. Pe arcele respective sînt trecute în figură şi costurile de transport pe unitatea de produs între localităţile reprezentate de extremităţile acelor arce, costuri ce depind de aglomerarea liniilor, de distanţă ş.a.m.d.

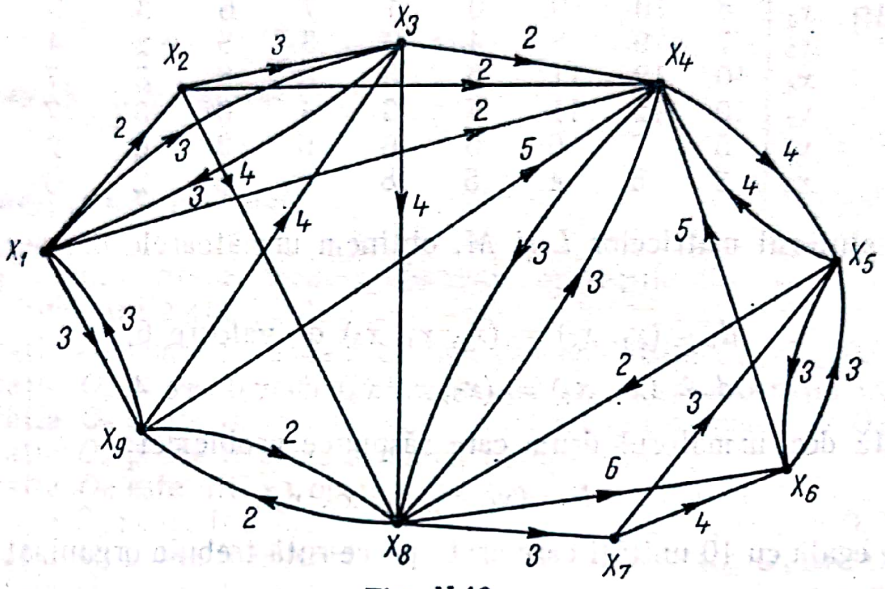


Fig. II.19

a) Să se determine ruta pe care trebuie făcut transportul, dacă se impune ca această rută să treacă în mod obligatoriu prin localitatea x_5, iar costul total de transport pe unitatea de produs să fie minim.

b) Aceeaşi întrebare, dacă se impune ca ruta să treacă în mod obligatoriu prin localitatea x_6.

c) Să se determine ruta pe care trebuie organizat transportul, astfel ca ea să treacă în mod obligatoriu prin localităţile x_3, x_6 şi x_7, în această ordine, iar costul total de transport să fie minim.

d) Aceeaşi întrebare ca la punctul precedent, dacă ordinea în care ruta trebuie să treacă prin cele trei localităţi impuse este indiferentă.

Rezolvare. Matricea ponderilor reţelei R este următoarea:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	2	3	2	∞	∞	∞	∞	3
x_2	∞	0	3	2	∞	∞	∞	4	∞
x_3	3	∞	0	2	∞	∞	∞	4	∞
x_4	∞	∞	∞	0	4	∞	∞	3	∞
x_5	∞	∞	∞	4	0	3	∞	2	∞
x_6	∞	∞	∞	5	3	0	∞	∞	∞
x_7	∞	∞	∞	∞	3	4	0	∞	∞
x_8	∞	∞	∞	3	∞	6	3	0	2
x_9	3	∞	∞	4	5	∞	∞	2	0

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestei matrice, folosind un algoritm corespunzător rețelelor cu circuite, obținem următoarea matrice M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare vîrfuri ale rețelei R:

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	2	3	2	6	9	8	5	3
x_2	9	0	3	2	6	9	7	4	6
x_3	3	5	0	2	6	9	7	4	6
x_4	8	10	9	0	4	7	6	3	5
x_5	7	9	8	4	0	3	5	2	4
x_6	10	12	11	5	3	0	8	5	7
x_7	10	12	11	7	3	4	0	5	7
x_8	5	7	6	3	6	6	3	0	2
x_9	3	5	4	5	8	8	5	2	0

a) Cu ajutorul matricelor L și M, obținem următoarele drumuri de valori minime:

$$d_{\min}(x_1, x_5) = (x_1, x_4, x_5) \text{ de valoare 6,}$$

$$d_{\min}(x_5, x_9) = (x_5, x_8, x_9) \text{ de valoare 4.}$$

Rezultă deci următorul drum care răspunde problemei:

$$d = (x_1, x_4, x_5, x_8, x_9),$$

de valoare egală cu 10 unități care arată pe ce rută trebuie organizat transportul produsului.

b) Vom obține în mod asemănător:

$$d_{\min}(x_1, x_6) = (x_1, x_4, x_5, x_6), \text{ de valoare 9,}$$

$$d_{\min}(x_6, x_9) = (x_6, x_5, x_8, x_9), \text{ de valoare 7.}$$

Rezultă deci următorul drum:

$$d' = (x_1, x_4, x_5, x_6, x_5, x_8, x_9),$$

de-a lungul căruia trebuie organizat transportul, costul total unitar de transport fiind de 16 u.b.

După cum se vede, acest drum nu mai este elementar.

c) Avem:

$$d_{\min}(x_1, x_3) = (x_1, x_3),$$

$$d_{\min}(x_3, x_6) = (x_3, x_4, x_5, x_6),$$

$$d_{\min}(x_6, x_7) = (x_6, x_5, x_8, x_7),$$

$$d_{\min}(x_7, x_9) = (x_7, x_5, x_8, x_9).$$

Obținem următorul drum ce răspunde problemei:

$$d = (x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_7, x_5, x_8, x_9),$$

de valoare egală cu 27 unități.

Scanned with OKEN Scanner

d) Cercetăm separat, ca la punctul precedent, toate drumurile ce trec prin vîrfurile x_3, x_6 și x_7, puse respectiv în ordinea următoare:

$$x_3, x_6, x_7, \qquad x_7, x_3, x_6, \qquad x_6, x_3, x_7,$$
$$x_3, x_7, x_6, \qquad x_7, x_6, x_3, \qquad x_6, x_7, x_3,$$

obținînd respectiv drumuri cu următoarele valori: 27, 21, 35, 29, 34 și 34. Rezultă că a doua posibilitate de aranjare a celor trei vîrfuri este cea mai convenabilă, soluția problemei fiind dată de drumul:

$$d'' = (x_1, x_3, x_8, x_7, x_6, x_5, x_8, x_9),$$

de valoare egală cu 21 unități.

§ 6. PROBLEME PROPUSE

1. Asupra unui produs trebuie efectuate operațiile $O_1, O_2, \ldots, O_8$, astfel încît să fie îndeplinite condițiile:

— operația O_1 poate fi urmată de una din operațiile O_2, O_3, O_7 sau O_8,
— operația O_2 poate fi urmată de operația O_3 sau de operația O_8,
— operația O_3 poate fi urmată de operația O_4 sau de operația O_5,
— operația O_4 poate fi urmată numai de operația O_5,
— operația O_5 este ultima operație ce trebuie efectuată,
— operația O_6 poate fi urmată de una din operațiile O_1, O_5 sau O_7,
— operația O_7 poate fi urmată de una din operațiile O_3, O_4 sau O_5,
— operația O_8 poate fi urmată de operația O_3 sau de operația O_7.

Să se arate dacă cele opt operații pot fi efectuate asupra produsului, astfel încît să fie îndeplinite condițiile date. În caz afirmativ, să se indice ordinea în care trebuie efectuate aceste operații.

Soluție. Da, în ordinea dată de:

$$d_H = (O_6, O_1, O_2, O_8, O_7, O_3, O_4, O_5).$$

2. Un fenomen economic este modelat de rețeaua fără circuite din figura II.20, în care se urmărește existența unui drum hamiltonian. Să se arate dacă

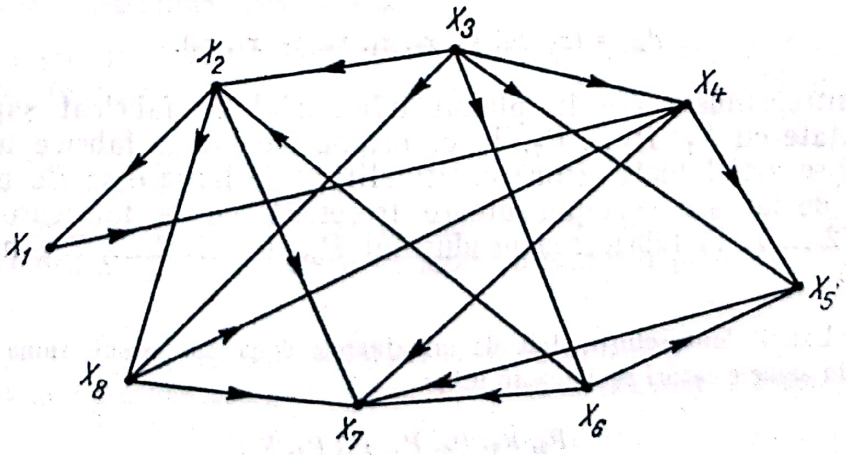


Fig. II.20

Scanned with OKEN Scanner

un astfel de drum există în rețeaua dată, iar în cazul unui răspuns negativ, să se arate ce ar trebui adăugat rețelei, astfel încît rețeaua să rămînă fără circuite și să conțină un drum hamiltonian.

Soluție. Nu, dar dacă se adaugă arcul (x_1, x_8), rețeaua va conține drumul hamiltonian:

$$d_H^1 = (x_3, x_6, x_2, x_1, x_8, x_4, x_5, x_7),$$

iar dacă se adaugă arcul (x_8, x_1), rețeaua va conține drumul hamiltonian:

$$d_H^2 = (x_3, x_6, x_2, x_8, x_1, x_4, x_5, x_7).$$

3. Pentru trecerea succesivă a unui produs pe la nouă puncte de control al calității, notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_9$, se încearcă folosirea unui sistem de benzi transportoare, existent la întreprindere, sistem reprezentat în figura II.21. Să

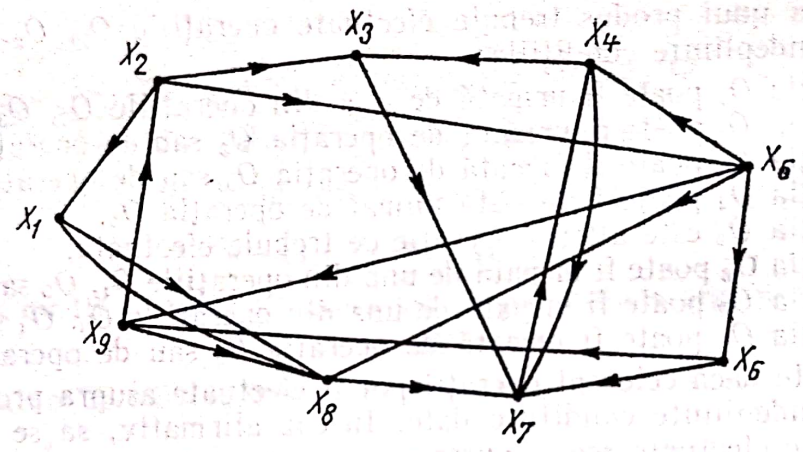


Fig. II.21

se arate dacă acest sistem poate fi folosit în scopul urmărit și în ce ordine trebuie organizată trecerea produsului prin cele nouă puncte.

Soluție. Da, ordinea fiind dată de drumul hamiltonian ce urmează:

$$d_H = (x_5, x_6, x_9, x_2, x_1, x_8, x_7, x_4, x_3).$$

4. O întreprindere are în planul trimestrial de fabricat șapte tipuri de produse, notate cu $P_1, P_2, \ldots, P_7$. În ce ordine trebuie să fabrice întreprinderea aceste produse astfel încît suma cheltuielilor de lansare să fie minimă, dacă cheltuielile de lansare corespunzătoare trecerilor de la fabricarea produsului P_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, la fabricarea produsului P_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$, sînt date în tabelul II.13.

Soluție. Există două soluții, date de următoarele două succesiuni, suma cheltuielilor de lansare fiind în ambele cazuri egală cu 15 u.b.:

$$(P_3, P_7, P_6, P_4, P_1, P_2, P_5),$$

$$(P_3, P_7, P_6, P_4, P_5, P_1, P_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.13

P_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	0	3	5	4	4	4	6
P_2	4	0	4	4	3	5	6
P_3	3	3	0	5	2	5	2
P_4	2	3	6	0	2	3	5
P_5	3	5	4	4	0	4	4
P_6	2	4	4	2	3	0	4
P_7	3	5	3	3	2	3	0

5. Aceeaşi problemă ca precedenta în cazul în care costurile de lansare sînt date de tabelul II.14.

Tabelul II.14

P_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	0	4	3	3	2	2	2
P_2	3	0	3	3	3	3	4
P_3	2	4	0	4	3	5	3
P_4	4	4	5	0	2	4	3
P_5	1	5	4	3	0	3	5
P_6	1	4	3	3	2	0	6
P_7	1	2	4	2	3	5	0

Soluţie. Ordinea este dată de următoarea succesiune:

$$(P_6, P_3, P_7, P_2, P_4, P_5, P_1),$$

suma costurilor de lansare fiind egală cu 14 u.b.

6. Un fenomen economic este modelat cu ajutorul reţelei fără circuite din figura II.22, în care urmărim drumurile de valoare minimă între diferitele vîrfuri.

Să se determine drumul (drumurile) de valoare minimă de la vîrful x_5 la vîrful x_8, în condiţiile ce urmează:

a) Acest drum (drumuri) trece în mod obligatoriu prin vîrfurile x_1 şi x_{11}.

b) Acest drum (drumuri) trece în mod obligatoriu prin vîrful x_2.

Soluţie.

a) $d = (x_5, x_9, x_1, x_{11}, x_{10}, x_8)$, de valoare egală cu 12 unităţi.

b) Există două drumuri, ambele au valoarea minimă de 12 unităţi şi anume:

$$d_1 = (x_5, x_7, x_2, x_3, x_8),$$

$$d_2 = (x_5, x_7, x_2, x_9, x_4, x_8).$$

Scanned with OKEN Scanner

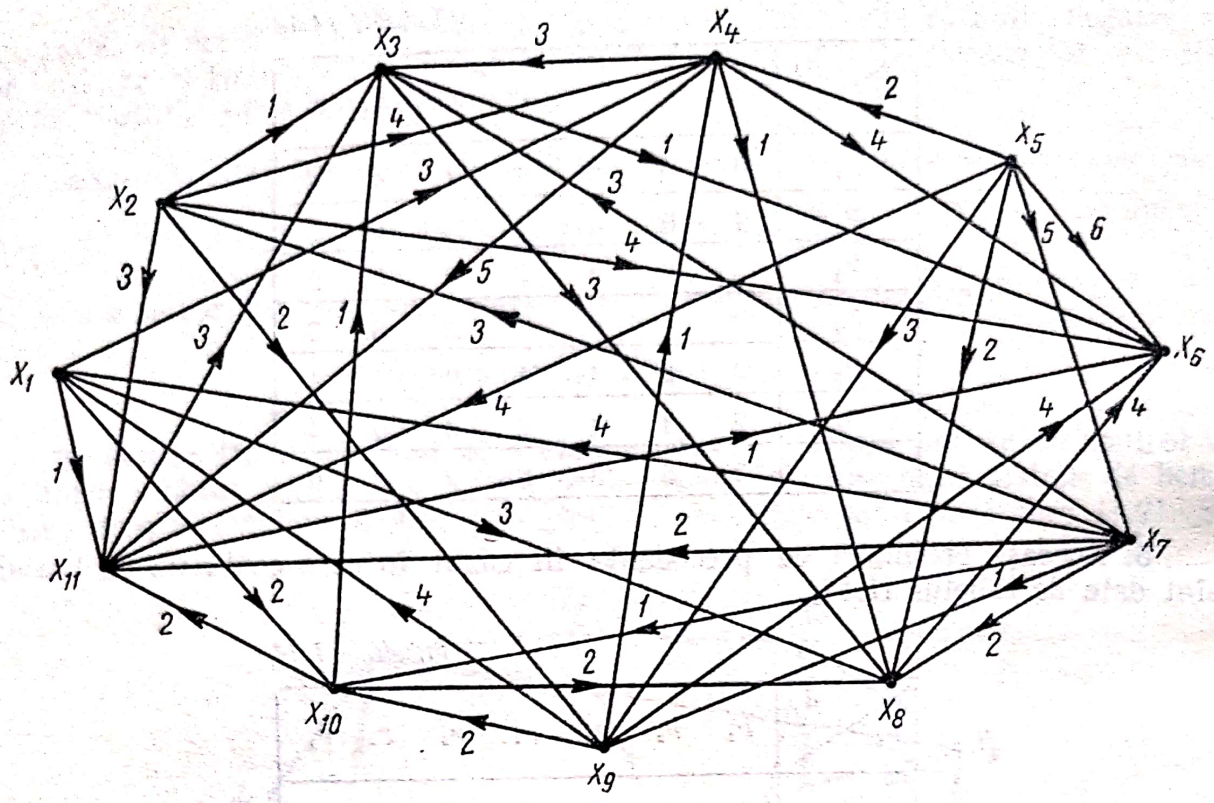


Fig. II. 22

7. Pentru transportul unui produs de la localitatea x_1 la localitatea x_8, se poate folosi sistemul de transport reprezentat prin rețeaua din figura II.23. Pe arcele rețelei s-au considerat ponderi egale cu costurile unitare de transport corespunzătoare.

Să se arate prin ce puncte ale sistemului trebuie organizat transportul, dacă:

a) Ruta folosită trebuie să treacă prin localitatea x_5.
b) Ruta folosită trebuie să treacă prin localitatea x_6.
c) Ruta folosită trebuie să treacă prin localitatea x_7.

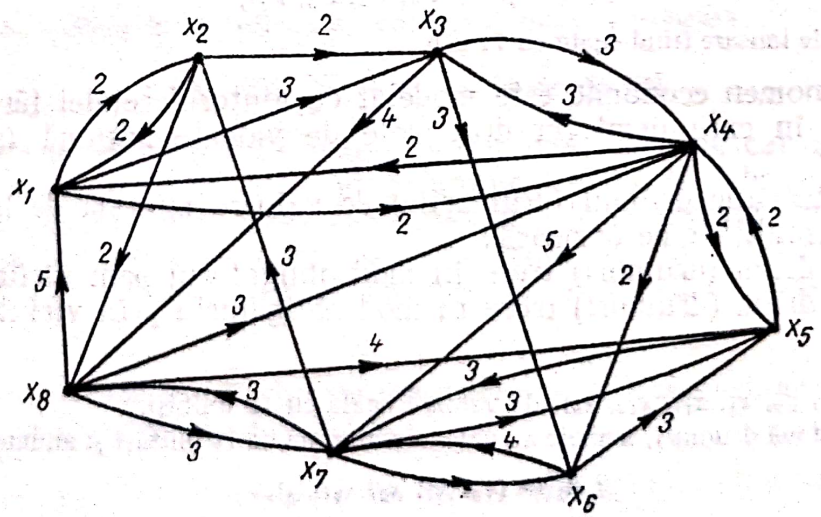


Fig. II. 23

Soluție.

a) $d_1 = (x_1, x_4, x_5, x_7, x_8)$, costul unitar de transport fiind de 10 u.b.

b) $d_2 = (x_1, x_4, x_6, x_7, x_8)$, costul unitar de transport fiind de 11 u.b.

c) Există trei drumuri, pe fiecare costul unitar de transport fiind de 10 u.b.:

$$d_3 = (x_1, x_2, x_8, x_7, x_8),$$

$$d_4 = (x_1, x_4, x_7),$$

$$d_5 = (x_1, x_4, x_5, x_7).$$

Evident că, dintre aceste drumuri, se va alege drumul d_4.

§ 7. PROBLEME CARE CER DETERMINAREA UNUI FLUX MAXIM, CU COST TOTAL MINIM, ÎNTR-O REȚEA DE FLUX

După cum se știe, o rețea de flux, cu funcție cost, este dată în general prin următoarele elemente:

— o mulțime $X = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$, ale cărei elemente se numesc noduri sau vîrfuri;

— o mulțime $\mathcal{A}$, ale cărei elemente sînt perechi ordonate de noduri, perechi numite arce;

— o funcție c, cu valori întregi nenegative, definită pe mulțimea arcelor, care atașează fiecărui arc (a_i, a_j) o valoare $c(a_i, a_j)$ și care este numită funcție capacitate;

— o funcție q, cu valori întregi nenegative, definită pe mulțimea arcelor, care atașează fiecărui arc (a_i, a_j) o valoare $q(a_i, a_j)$ și care este numită funcție cost (cost unitar).

În plus, printre nodurile rețelei, pot exista unele noduri cu grad interior de incidență nul, numite intrări (surse) și unele noduri cu grad exterior de incidență nul, numite ieșiri. Vom nota simbolic o rețea de flux, cu funcție cost prin $(X, \mathcal{A}, c, q)$. În cele ce urmează, vom folosi numai rețele de flux cu o singură sursă a_0 și o singură ieșire a_{n+1}.

Vom nota pe scurt, pentru ușurință:

$$c(a_i, a_j) = c_{ij}, \text{ pentru } (a_i, a_j) \in \mathcal{A},$$

$$q(a_i, a_j) = q_{ij}, \text{ pentru } (a_i, a_j) \in \mathcal{A}.$$

În plus, pentru simetrie, extindem funcțiile c și q pe toată mulțimea $x \times x_i$ astfel:

$$c_{ij} = 0, \text{ pentru } (a_i, a_j) \notin \mathcal{A},$$

$$q_{ij} = \infty, \text{ pentru } (a_i, a_j) \notin \mathcal{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Un flux de valoare totală Φ dată şi cu cost minim, ce străbate reţeaua, este o funcţie φ, care ataşează fiecărei perechi de noduri (a_i, a_j) un număr întreg nenegativ x_{ij} şi care respectă următoarele condiţii:

$$(i) \qquad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \qquad i, j = 0,1,2,\ldots, n+1,$$

$$(ii) \qquad \sum_{k=0}^{n} x_{ki} - \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 0, \qquad i = 1,2, \ldots, n,$$

$$(iii) \qquad \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j} = \sum_{k=0}^{n} x_{k,n+1} = \Phi, \qquad \Phi \text{ dat}$$

şi care minimalizează următoarea funcţie liniară, numită costul total al fluxului:

$$(iv) \quad f(\varphi) = \sum_{(x_i,\, x_j) \in A} q_{ij}\, x_{ij}.$$

Cantităţile x_{ij}, $i, j = 0, 1, 2,\ldots,n+1$, sînt evident nule în cazul în care $(a_i, a_j) \notin \mathcal{A}$ iar, în caz contrar, reprezintă, din punct de vedere practic, cantităţile de materie ce străbat arcele corespunzătoare.

Deseori, în practică, se pune problema de mai sus considerînd nu un flux oarecare Φ dat, ci valoarea cea mai mare a fluxului total ce poate străbate reţeaua, pe care îl notăm cu Φ^*. Pentru determinarea unui astfel de flux maxim, cu cost total minim, prezentăm un algoritm, care are parcurgerea etapelor ce urmează:

Etapa 0. Determinăm un flux oarecare la o valoare totală maximă, fără să ţinem seama de costuri*.

Etapa 1. Construim o reţea ajutătoare ataşată fluxului φ_0, pe care o notăm cu $R(\varphi_0)$, definită în modul următor:

a) Oricărui arc, (a_i, a_j), al reţelei date, pe care fluxul x_{ij} este nul, facem să-i corespundă în $R(\varphi_0)$ un arc (a_i, a_j), a cărui pondere este egală cu q_{ij}.

b) Oricărui arc (a_i, a_j) al reţelei, pe care circulă un flux egal cu capacitatea arcului (arc saturat), facem să-i corespundă în $R(\varphi_0)$ un arc de forma (a_j, a_i), a cărui pondere este egală cu $-q_{ij}$.

c) Oricărui arc (a_i, a_j) al reţelei, pe care circulă un flux nenul, dar strict mai mic decît capacitatea arcului, facem să-i corespundă în $R(\varphi_0)$ două arce şi anume:

— arcul (a_i, a_j) cu pondere egală cu q_{ij} şi

— arcul (a_j, a_i) cu ponderea egală eu $-q_{ij}$.

De cele mai multe ori, construirea reţelei $R(\varphi_0)$ se reduce la scrierea matricei L a acestei reţele.

Etapa 2. Cercetăm existenţa unui circuit de valoare strict negativă în reţeaua $R(\varphi_0)$, aplicînd arcul din algoritmele determinării matricei M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale acestei reţele. În aplicarea acestui algoritm, sînt posibile următoarele situaţii:

— algoritmul se încheie fără să fi apărut nici un element strict negativ pe diagonala principală a matricei M, ceea ce înseamnă că reţeaua $R(\varphi_0)$ nu conţine nici un circuit de valoare strict negativă;

---

* Modele matematice de organizare şi conducere a producţiei, I. Văduva, C. Dinescu, B. Săvulescu, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

— pe parcursul aplicării algoritmului, apare cel puțin un element strict negativ pe diagonala principală a matricei obținute, ceea ce înseamnă că rețeaua $R(\varphi_0)$ conține cel puțin un circuit de valoare negativă ce se poate determina ușor, cu ajutorul matricei L și a formei intermediare a matricei M la care s-a ajuns (în acest caz, matricea M însăși își pierde sensul).

În primul caz deducem că φ_0 este un flux maxim cu cost total minim și întregul algoritm ia sfîrșit. În cel de al doilea caz, trecem la etapa următoare.

Etapa 3. Folosim circuitul obținut la etapa precedentă modificînd fluxurile de pe arcele rețelei după cum urmează:

— se adună o cantitate θ la fluxurile de pe acele arce ale rețelei, cărora le corespund arce în $R(\varphi_0)$ ce aparțin circuitului găsit, avînd valori pozitive;

— se scade θ din fluxurile de pe acele arce ale rețelei cărora le corespund arce în $R(\varphi_0)$ ce aparțin circuitului găsit, avînd valori negative;

— fluxurile de pe celelalte arce ale rețelei rămîn neschimbate;

— se determină valoarea lui θ, astfel încît noul flux de pe fiecare arc să verifice încă restricțiile (*i*) și se calculează efectiv fluxurile noi.

În acest mod, se obține un nou flux pe rețeaua dată, căruia îi corespunde același flux total, dar al cărui cost total este mai mic (costul total a scăzut cu o cantitate egală cu produsul dintre θ și modulul valorii circuitului folosit). Cu fluxul obținut, se reia etapa întîi a algoritmului. Algoritmul continuă pînă cînd se obține un flux φ_k cu cost total minim, ne mai existînd în rețeaua $R(\varphi_k)$, atașată lui, nici un circuit de valoare strict negativă.

O b s e r v a ț i i 1. Dacă se cere un flux de valoare totală dată, $\Phi < \Phi^*$, algoritmul de mai sus se aplică în mod asemănător, cu deosebirea că se pornește de la un flux φ_0, a cărui valoare este Φ. Acesta se determină în etapa zero, fie direct, fie micșorînd un flux de valoare totală maximă, cu cantitatea $\Phi^* - \Phi$.

2. În determinarea circuitului de valoare strict negativă, la etapa a doua a algoritmului, avem grijă totdeauna să evităm repetarea vîrfurilor, urmărind obținerea unui circuit elementar.

O problemă care se poate reduce la cea anterioară este așa-numita *problemă a determinării cuplajului maxim cu cost total minim într-o rețea bipartită.* Mai precis, dîndu-ne o rețea bipartită, în care ponderile atașate arcelor le vom numi costuri, se pune problema extragerii unui număr maxim de arce neadiacente astfel încît suma costurilor corespunzătoare lor să fie minimă. Pentru rezolvarea acestei probleme, se construiește o rețea de flux ajutătoare, cu funcție cost, în care se determină un flux maxim cu cost total minim, arcele cu flux nenul dînd soluția problemei. Astfel, dîndu-se rețeaua bipartită cu submulțimile de noduri:

$$X^{(1)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\},$$

$$X^{(2)} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\},$$

așa fel încît ea conține arce de tipul (x_i, y_j), cu $x_i \in X^{(1)}$ și $y_j \in X^{(2)}$, costul corespunzător fiind q_{ij}, rețeaua ajutătoare se construiește după cum urmează:

— vîrfurile rețelei vor fi nodurile rețelei bipartite date, la care se adaugă o intrare și o ieșire;

— o parte din arcele rețelei va fi constituită din toate arcele rețelei date, considerînd capacitățile corespunzătoare lor egale cu infinit, iar costurile fiind cele date de problemă;

Scanned with OKEN Scanner

— intrarea în rețea se leagă cu fiecare nod din mulțimea $X^{(1)}$ printr-un arc de capacitate egală cu unu și cost nul;

— fiecare nod din mulțimea $X^{(2)}$ se leagă cu ieșirea printr-un arc de capacitate egală cu unu și cost nul.

În cazul în care $m = n$, iar cuplajul maxim are $m = n$ arce, datorită formei particulare a rețelei de flux ajutătoare, atît sursa cît și ieșirea nu pot participa la nici unul dintre circuitele de valoare strict negativă, lucru ce se caută la etapa a doua. Aceasta micșorează de fapt numărul de vîrfuri ale rețelei

$$R^0(\varphi_i)^*, i = 0, 1, 2, \ldots .$$

§ 8 PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Într-un centru de producție x_1 există o mare cantitate dintr-un produs, ce trebuie depozitat în alt centru, x_{10}. Pentru transportul acestui produs, se folosește o rețea de transport, cu centrele intermediare x_2, x_3,...,x_9. Arcele acestei rețele au capacități limitate, capacității scrise pe arcele respective în figura II.24, costurile unitare de transport fiind scrise în paranteze, lîngă capacitățile corespunzătoare.

Să se determine un plan de transport, astfel încît să poată fi transportată o cantitate cît mai mare de produs din x_1 în x_{10}, costul total de transport fiind minim.

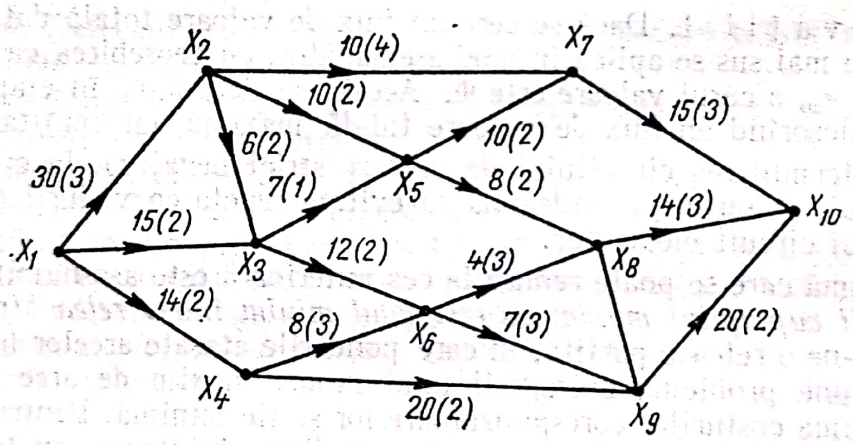


Fig. II. 24

Rezolvare. Pe figura II.25 este indicat un flux inițial, obținut prin transportul următoarelor cantități pe drumuri alese arbitrar:

— 10 unități pe drumul (x_1, x_2, x_7, x_{10}),
— 8 unități pe drumul $(x_1, x_2, x_5, x_8, x_{10})$,
— 2 unități pe drumul $(x_1, x_2, x_5, x_7, x_{10})$,
— 6 unități pe drumul $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{10})$,
— 3 unități pe drumul $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_{10})$,
— o unitate pe drumul $(x_1, x_3, x_6, x_9, x_{10})$,
— 4 unități pe drumul $(x_1, x_4, x_6, x_8, x_{10})$,
— 10 unități pe drumul (x_1, x_4, x_9, x_{10}).

S-au transportat astfel 44 unități de la x_1 la x_{10}.

Scanned with OKEN Scanner

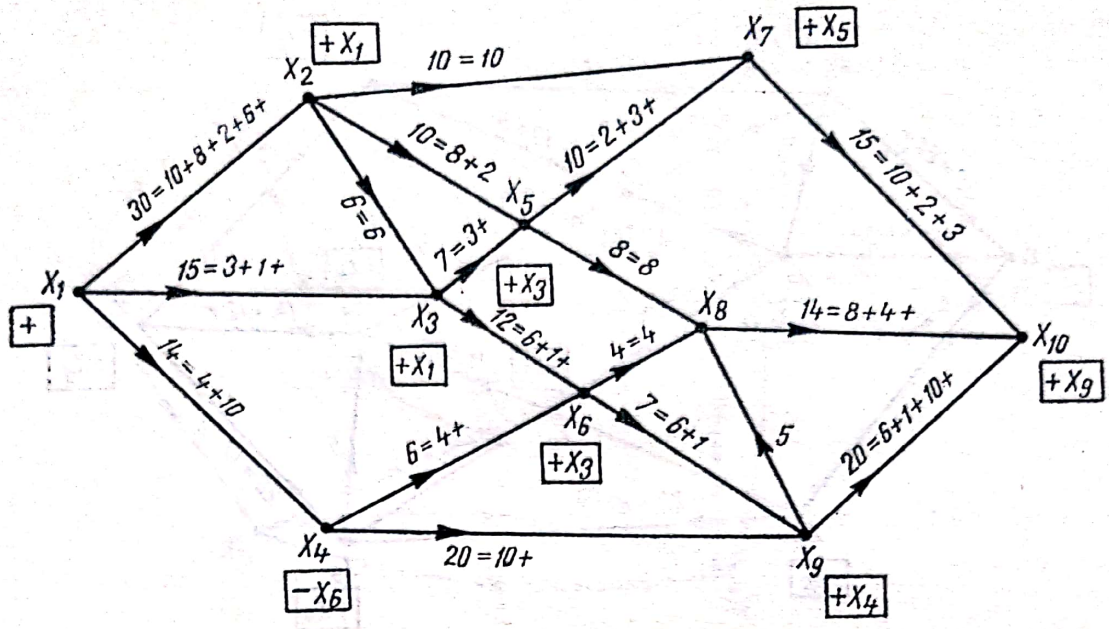


Fig. II. 25

Pe aceeaşi figură este făcută o marcare a vîrfurilor şi anume:
— de la x_1 sînt marcate x_2 şi x_3 cu $+ x_1$,
— de la x_2 nu se poate marca nici un vîrf,
— de la x_3 sînt marcate vîrfurile x_5 şi x_6 cu $+ x_3$,
— de la x_5 este marcat x_7 cu $+x_5$,
— de la x_6 este marcat x_4 cu $- x_6$,
— de la x_7 nu se poate marca nici un vîrf,
— de la x_4 se poate marca x_9 cu $+ x_4$,
— de la x_9 se poate marca ieşirea x_{10} cu $+x_9$.

Se obţine astfel lanţul $(x_1, x_3, x_6, x_4, x_9, x_{10})$, de-a lungul căruia se poate face un transport de trei unităţi. Bineînţeles că pe arcul (x_4, x_6), care este parcurs în sens invers în lanţul găsit, se face un transport indirect, deci se scad trei unităţi din fluxul ce străbate acest arc. Obţinem astfel fluxul din figura II.26, căruia îi corespunde un flux total de 47 unităţi. O nouă marcare a vîrfurilor este făcută pe această figură, în modul următor:

— de la x_1 sînt marcate x_2 şi x_8 cu $+ x_1$,
— de la x_2 nu se poate marca nici un vîrf,
— de la x_3 sînt marcate x_5 şi x_6 cu $+ x_3$,
— de la x_5 este marcat x_7 cu $+ x_5$,
— de la x_6 este marcat x_4 cu $- x_6$,
— de la x_7 nu se poate marca nici un vîrf,
— de la x_4 este marcat x_9 cu $+ x_4$,
— de la x_9 este marcat x_8 cu $+ x_9$,
— de la x_9 este marcată ieşirea x_{10} cu $+ x_8$.

Obţinem astfel lanţul $(x_1, x_3, x_6, x_4, x_9, x_8, x_{10})$, de-a lungul căruia putem transporta o unitate. Făcînd acest transport obţinem fluxul din figura II.27 în care s-a făcut şi o nouă marcare a vîrfurilor, în modul următor:

— de la x_1 sînt marcate x_2 şi x_3 cu $+ x_1$,
— de la x_2 nu se poate marca nici un vîrf,

Scanned with OKEN Scanner

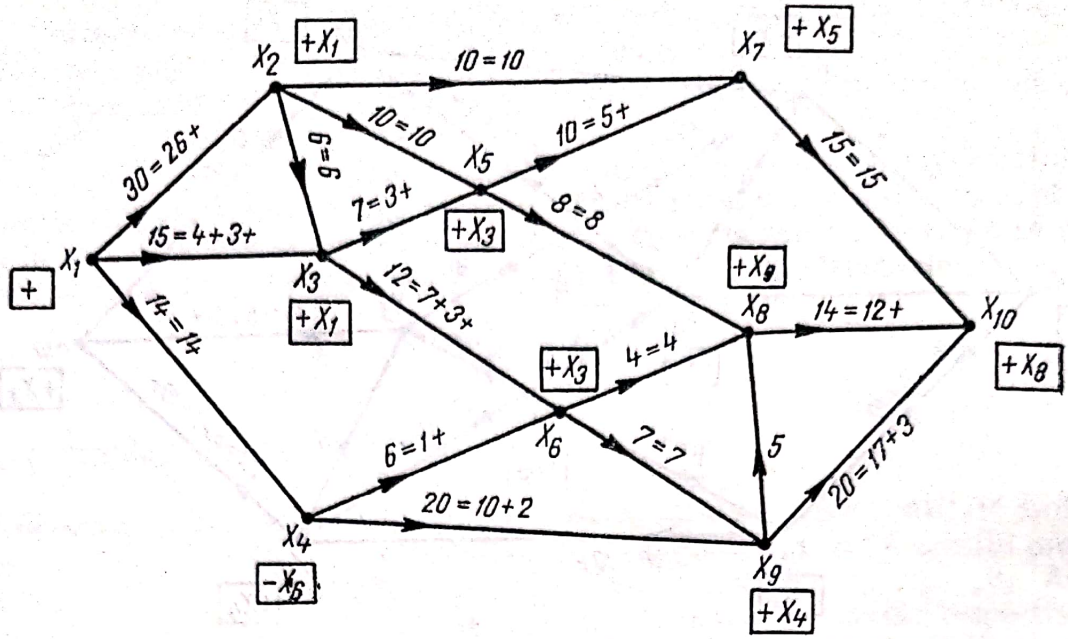


Fig. II. 26

— de la x_3 sînt marcate x_5 și x_6 cu $+ x_3$,
— de la x_5 este marcat x_7 cu $+ x_5$,
— de la x_6 nu se poate marca nici un vîrf,
— de la x_7 nu se poate marca nici un vîrf.

Deoarece nu se mai poate marca ieșirea din rețea, fluxul din figura II.27 este un flux maxim. El are o valoare totală de 48 unități. Pe figură este trasată și tăietura de capacitate minimă, care separă vîrfurile marcate de cele nemarcate. Să notăm acest flux cu φ_0. Costul total corespunzător lui se calculează

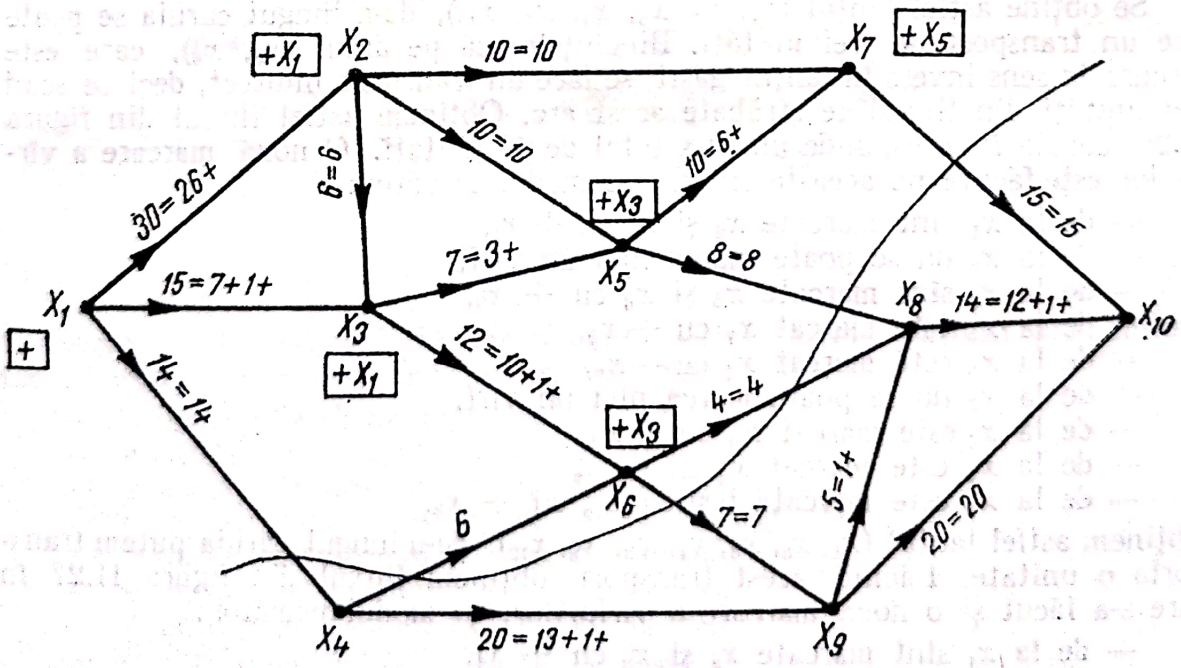


Fig. II. 27

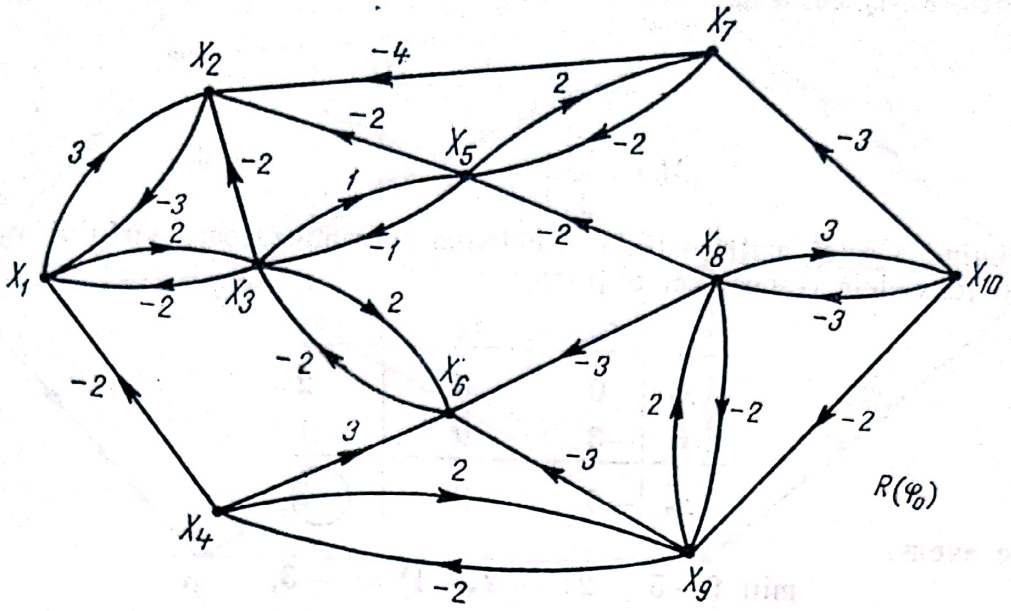


Fig. II.28

făcînd suma produselor dintre fluxurile ce străbat arcele rețelei și costurile corespunzătoare. Se obține astfel:

$$f(\varphi_0) = 434 \text{ u.b.}$$

Cu fluxul inițial obținut mai sus, începem prima iterație a algoritmului. Pentru a verifica dacă acest flux are cost total minim, în raport cu toate fluxurile maxime posibile, construim rețeaua $R(\varphi_0)$ din figura II.28, în care cercetăm dacă există circuite strict negative. Matricea ponderilor acestei rețele este următoarea:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	3	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
x_2	—3	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
x_3	—2	—2	0	∞	1	2	∞	∞	∞	∞
x_4	—2	∞	∞	0	∞	3	∞	∞	2	∞
x_5	∞	—2	—1	∞	0	∞	2	∞	∞	∞
x_6	∞	∞	—2	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
x_7	∞	—4	∞	∞	—2	∞	0	∞	∞	∞
x_8	∞	∞	∞	∞	—2	—3	∞	0	—2	3
x_9	∞	∞	∞	—2	∞	—3	∞	2	0	∞
x_{10}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	—3	—3	—2	0

Cu ajutorul acestei matrice începem aplicarea algoritmului lui Dantzig pentru determinarea matricei M, ale cărei elemente sînt egale cu valorile minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale rețelei $R(\varphi_0)$. Pornim acest algoritm

Scanned with OKEN Scanner

de la matricea M_2, corespunzătoare subrețelei cu vîrfurile x_1 și x_2, care se scrie imediat:

(M_2)

	x_1	x_2
x_1	0	3
x_2	−3	0

Adăugînd acestei matrice linia și coloana corespunzătoare vîrfului x_3, calculate cu formulele respective, obținem:

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	3	2
x_2	−3	0	−1
x_3	−5	−2	−3

Deoarece avem:

$$\min\{-5+2;\ -2-1\} = -3,$$

element încercuit în matricea de mai sus, înseamnă că subrețeaua formată numai cu vîrfurile x_1, x_2 și x_3 conține cel puțin un circuit de valoare strict negativă, ce trece prin vîrful x_3. Se obține ușor următorul circuit:

$$d_0(x_3, x_3) = (x_3, x_2, x_1, x_3),$$

a cărui valoare este egală cu −3. Vom modifica deci fluxurile ce străbat arcele (x_2, x_3) (x_1, x_2) și (x_1, x_3), în rețeaua dată, în sensul indicat de figura II.29, unde cantitatea θ_0 se determină imediat, ca fiind egală cu șase Făcînd această modificare pe rețea, obținem fluxul φ, din figura II.30, cu aceeași valoare totală ca și φ_0, dar al cărui cost total este egal cu:

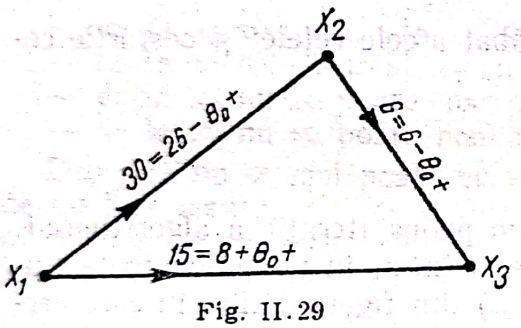


Fig. II.29

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_0) - \theta_0 \mid \text{val. } d_0(x_3, x_3) \mid = 434 - 6 \cdot 3 = 416 \text{ u.b.}$$

Cu acest nou flux găsit, începem iterația a doua a algoritmului. Pentru a cerceta optimilitatea fluxului φ_1, scriem direct matricea ponderilor rețelei $R(\varphi_1)$ și anume:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	3	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
x_2	−3	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
x_3	−2	∞	0	∞	1	2	∞	∞	∞	∞
x_4	−2	∞	0	∞	∞	3	∞	∞	2	∞
x_5	∞	−2	−1	∞	0	∞	2	∞	∞	∞
x_6	∞	∞	−2	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
x_7	∞	−4	∞	∞	−2	∞	0	∞	∞	∞
x_8	∞	∞	∞	∞	−2	−3	∞	0	−2	3
x_9	∞	∞	∞	−2	∞	−3	∞	2	0	∞
x_{10}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	−3	−3	−2	0

Scanned with OKEN Scanner

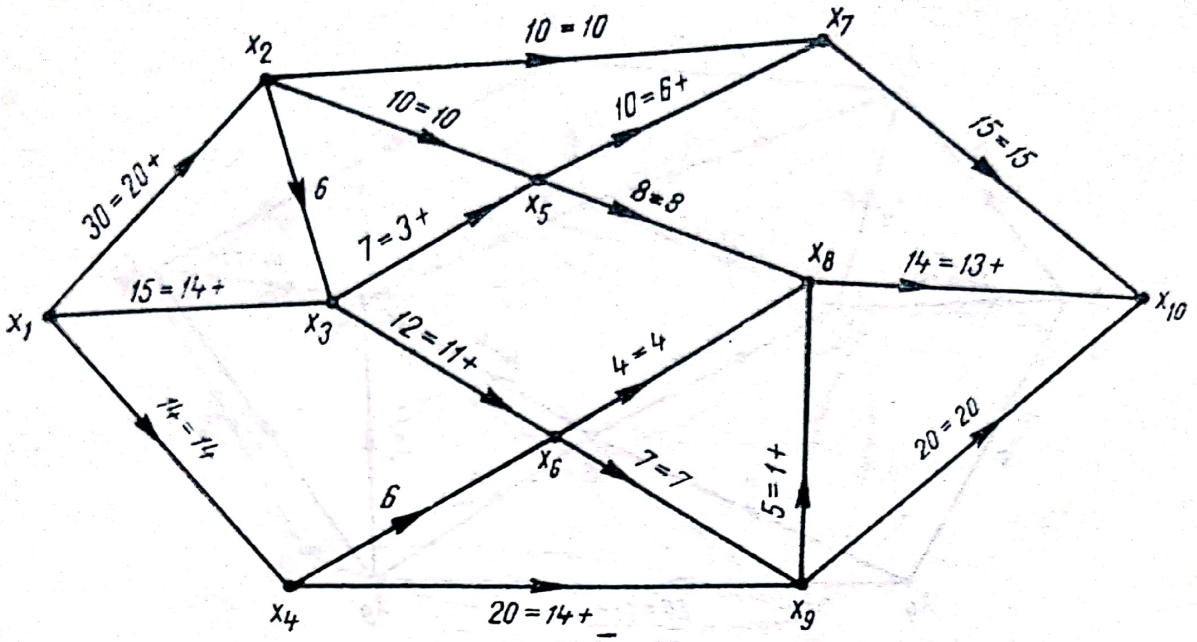


Fig. II. 30

Aplicînd algoritmul lui Dantzig pentru determinarea matricei M, corespunzătoare rețelei $R(\varphi_1)$, obținem următoarea matrice M_4, bordată cu linia și coloana corespunzătoare vîrfului x_5:

(M_4)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	2	∞	3
x_2	—3	0	—1	∞	0
x_3	—2	1	0	∞	1
x_4	—2	1	0	0	1
x_5	—5	—2	—3	∞	(—2)

Elementul încercuit în această matrice indică existența, în subrețeaua cu cinci vîrfuri a lui $R(\varphi_1)$ a cel puțin unui circuit de valoare strict negativă, ce trece prin vîrful x_5. Se găsește astfel circuitul:

$$d_1(x_5, x_5) = (x_5, x_2, x_1, x_3, x_5),$$

a cărui valoare este egală cu —2. Facem deci modificări ale fluxului φ_1 pe arcele ce corespund acestui circuit, conform figurii II.31, unde cantitatea θ_1 se determină ca avînd o valoare egală cu unitatea. Cu aceste modificări, obținem fluxul φ_2 din figura II.32, egal ca valoare totală cu φ_0 și φ_1, dar căruia îi corespunde un cost total egal cu:

$$f(\varphi_2) = f(\varphi_1) - \theta_1 \,|\text{val. } d_1(x_5, x_5)| = 416 - 1 \cdot 2 = 414.$$

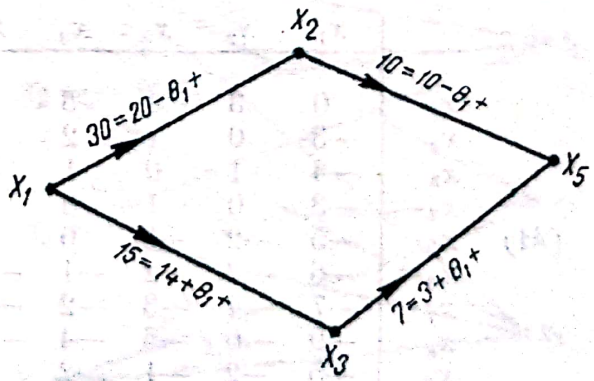


Fig. II. 31

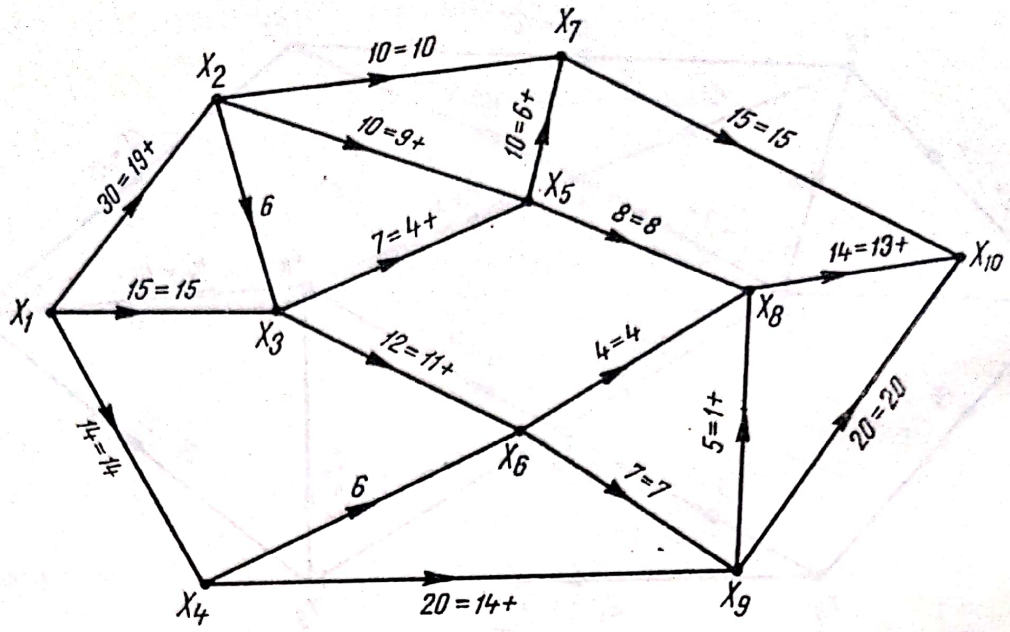


Fig. II.32

Cu acest nou flux, începem iterația a treia a algoritmului atașîndu-i rețeaua $R(\varphi_2)$ din figura II.33, a cărei matrice a ponderilor este următoarea:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
x_2	—3	0	2	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞
x_3	—2	∞	∞	∞	1	2	∞	∞	∞	∞
x_4	—2	∞	∞	0	∞	3	∞	∞	2	∞
x_5	∞	—2	—1	∞	0	∞	2	∞	∞	∞
x_6	∞	∞	—2	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
x_7	∞	—4	∞	∞	—2	∞	0	∞	∞	∞
x_8	∞	∞	∞	∞	—2	—3	∞	0	∞	3
x_9	∞	∞	∞	—2	∞	∞	∞	∞	0	∞
x_{10}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	—3	—3	—2	0

Aplicînd algoritmul lui Dantzig, obținem următoarea matrice M corespunzătoare rețelei $R(\varphi_2)$ fără să mai obținem nici un element strict negativ pe diagoanala principală:

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	3	4	5	5	6	7	∞	7	∞
x_2	—3	0	1	2	2	3	4	∞	4	∞
x_3	—4	—1	0	1	1	2	3	∞	3	∞
x_4	—3	0	1	0	2	3	4	∞	2	∞
x_5	—5	—2	—1	0	0	1	2	∞	2	∞
x_6	—6	—3	—2	—1	—1	0	1	∞	1	∞
x_7	—7	—4	—3	—2	—2	—1	0	∞	0	∞
x_8	—9	—6	—5	—4	—4	—3	—2	0	—2	3
x_9	—5	—2	—1	—2	0	1	2	∞	0	∞
x_{10}	—12	—9	—8	—7	—7	—6	—5	—3	—5	0

Scanned with OKEN Scanner

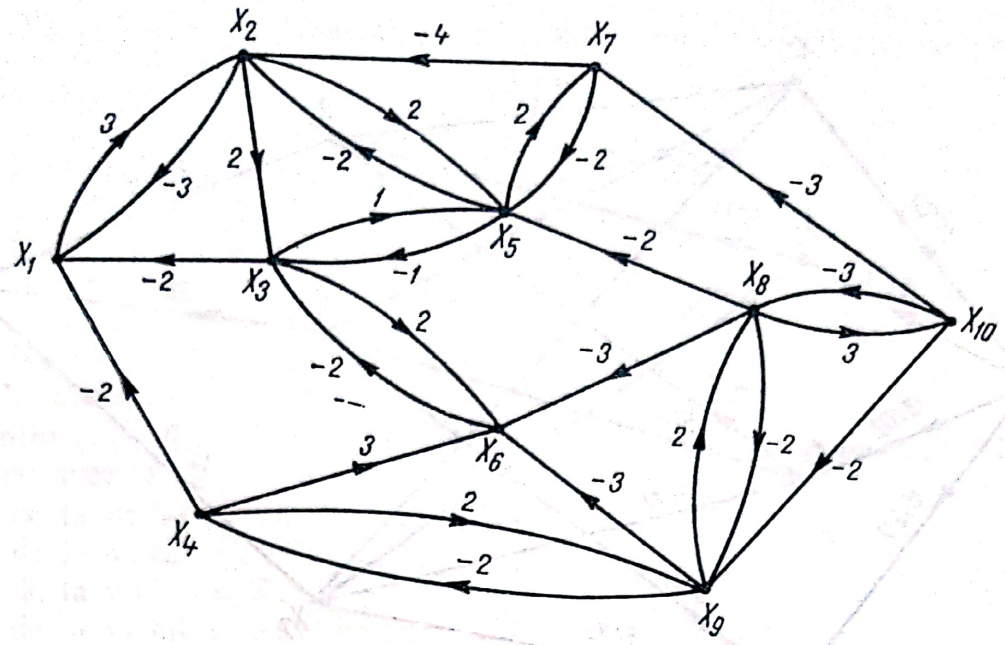


Fig. II. 33

Rezultă că fluxul φ_2, reprezentat în figura II.35, are un cost total minim, în raport cu toate fluxurile de valoare maximă ce pot străbate rețeaua dată. Acest flux indică și modul în care trebuie organizat transportul de la localitatea x_1 la localitatea x_{10}.

Problema 2. În patru centre de producție, x_1, x_2, x_3 și x_4, se găsesc cîte 15 unități dintr-un produs, care este necesar în trei centre consumatoare, x_5, x_6, x_7. Posibilitățile de transport de la centrele producătoare la centrele consumatoare sînt reprezentate prin arce în rețeaua din figura II.34, pe fiecare arc fiind scrisă capacitatea de transport a liniei respective, precum și costul unitar de transport corespunzător (în paranteză).

Să se determine un plan de transport al produsului, care folosește rețeaua dată, astfel încît să se transporte o cantitate totală cît mai mare, iar costul total de transport să fie cît mai mic.

Rezolvare. Vom introduce o intrare unică în rețea, x_0, legată prin arce de cele patru centre producătoare, capacitățile fiind egale cu cantitățile disponibile de produs, iar costurile unitare de transport fiind nule. De asemenea, introducem și o ieșire unică legată prin arce de cele trei centre consumatoare, capacitățile fiind egale cu cantitățile necesare de produs, iar costurile unitare de transport fiind nule. În acest fel, obținem rețeaua din figura II.35, în care trebuie determinat un flux maxim cu cost total minim. În figura II.36 este reprezentat un flux φ_0 de

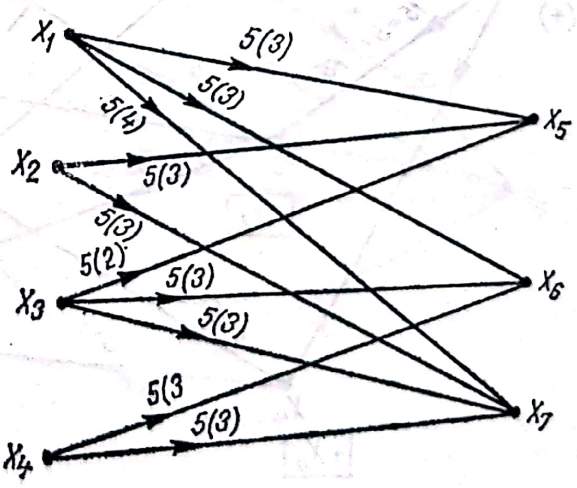


Fig. II. 34

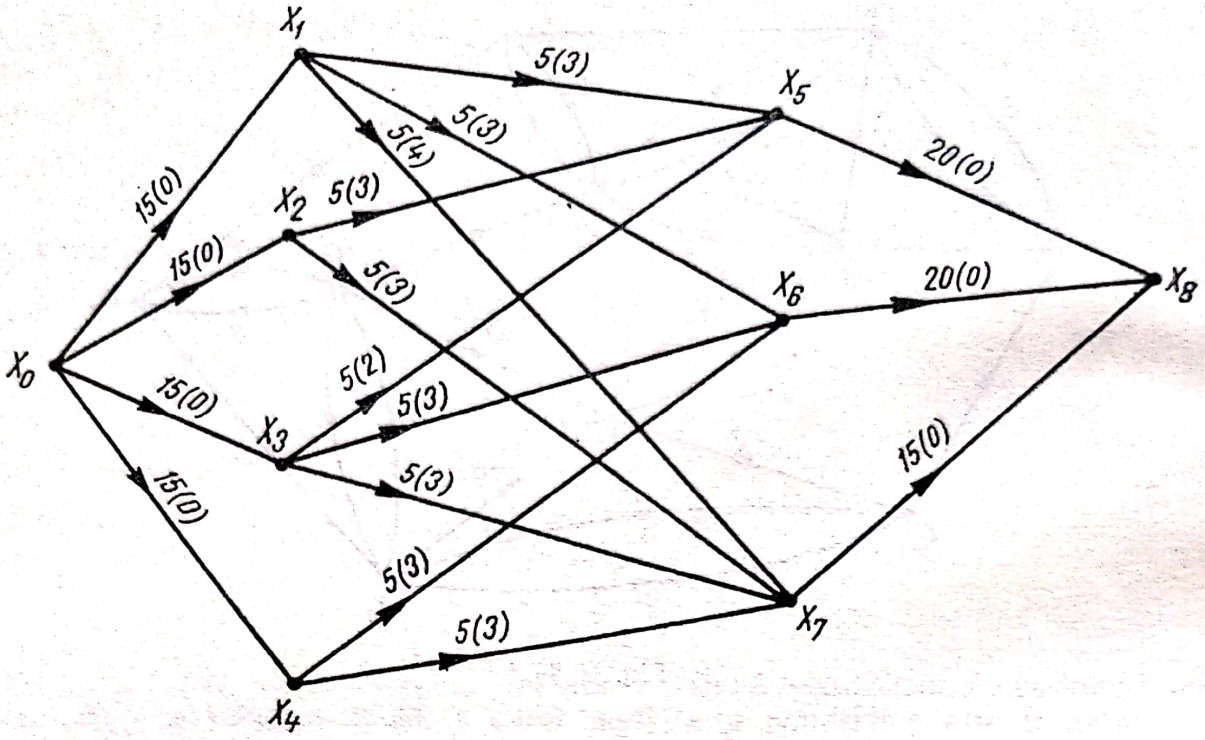


Fig. II. 35

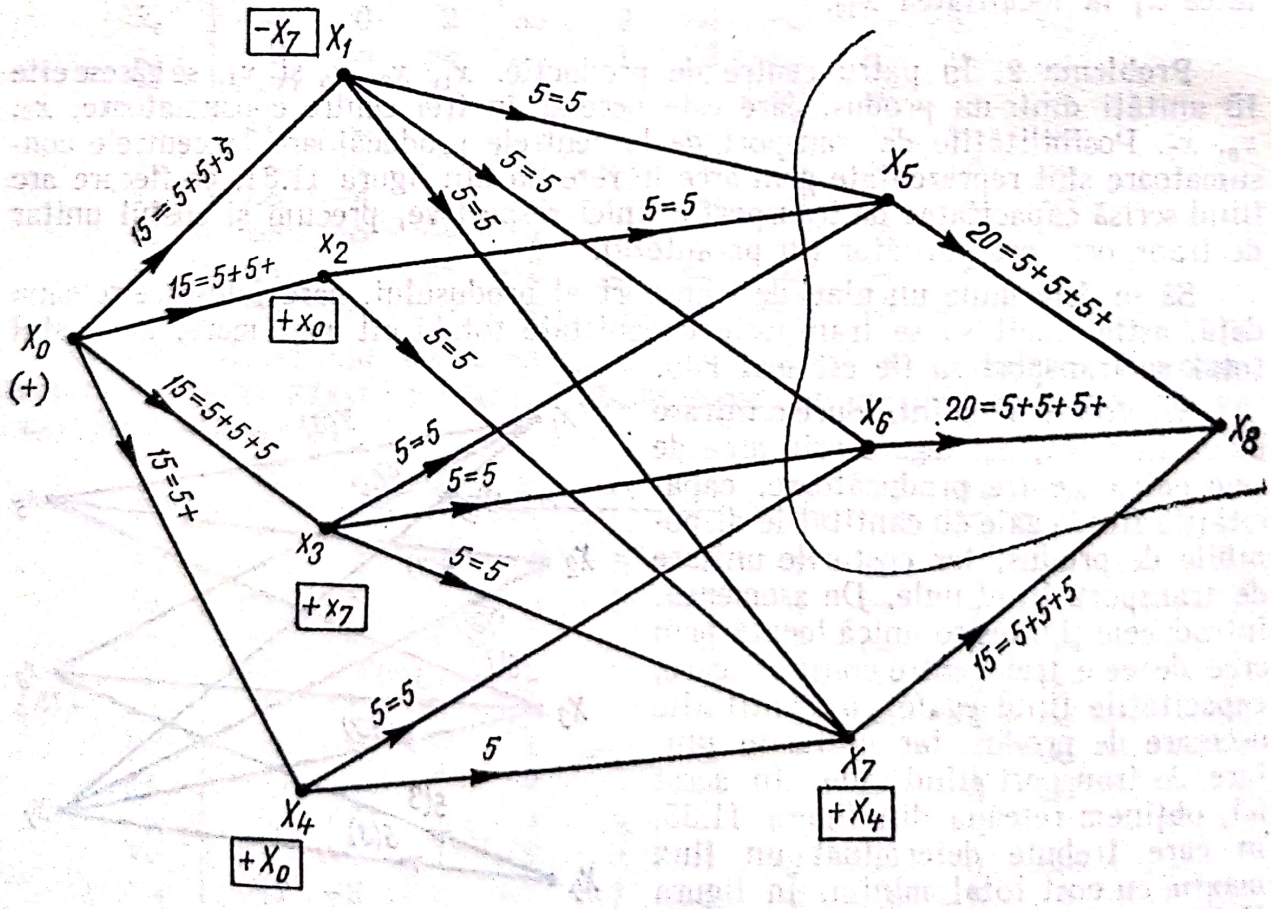


Fig. II. 36

Scanned with OKEN Scanner

valoare totală maximă, obținut prin următoarele transporturi, efectuate pe drumurile ce urmează:

— 5 unități pe drumul (x_0, x_1, x_5, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_1, x_6, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_1, x_7, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_2, x_5, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_2, x_7, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_3, x_5, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_3, x_6, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_3, x_7, x_8),
— 5 unități pe drumul (x_0, x_4, x_6, x_8).

Faptul că acest flux are valoare maximă rezultă din marcarea vîrfurilor, făcută pe această figură, în modul următor:

— de la vîrful x_0 s-au marcat vîrfurile x_2 și x_4 cu $+ x_0$,
— de la vîrful x_2 nu se poate marca nici un vîrf,
— de la vîrful x_4 s-a marcat vîrful x_7 cu $+ x_4$,
— de la vîrful x_7 s-au marcat vîrfurile x_1 și x_3 cu $-x_7$,
— de la vîrfurile x_1 și x_3 nu se mai poate marca nici un vîrf.

Pe figură este reprezentată de asemenea tăietura de capacitate minimă. Costul total corespunzător fluxului φ_0 este $f(\varphi_0) = 135$ u.b.

Pentru a verifica dacă fluxului φ_0 îi corespunde sau nu un cost total minim, construim rețeaua ajutătoare $R(\varphi_0)$ din figura II.37, din care se deduce — aplicînd un algoritm corespunzător — următorul circuit de valoare strict negativă (egală cu —1):

$$d_0(x_7, x_7) = (x_7, x_1, x_0, x_4, x_7).$$

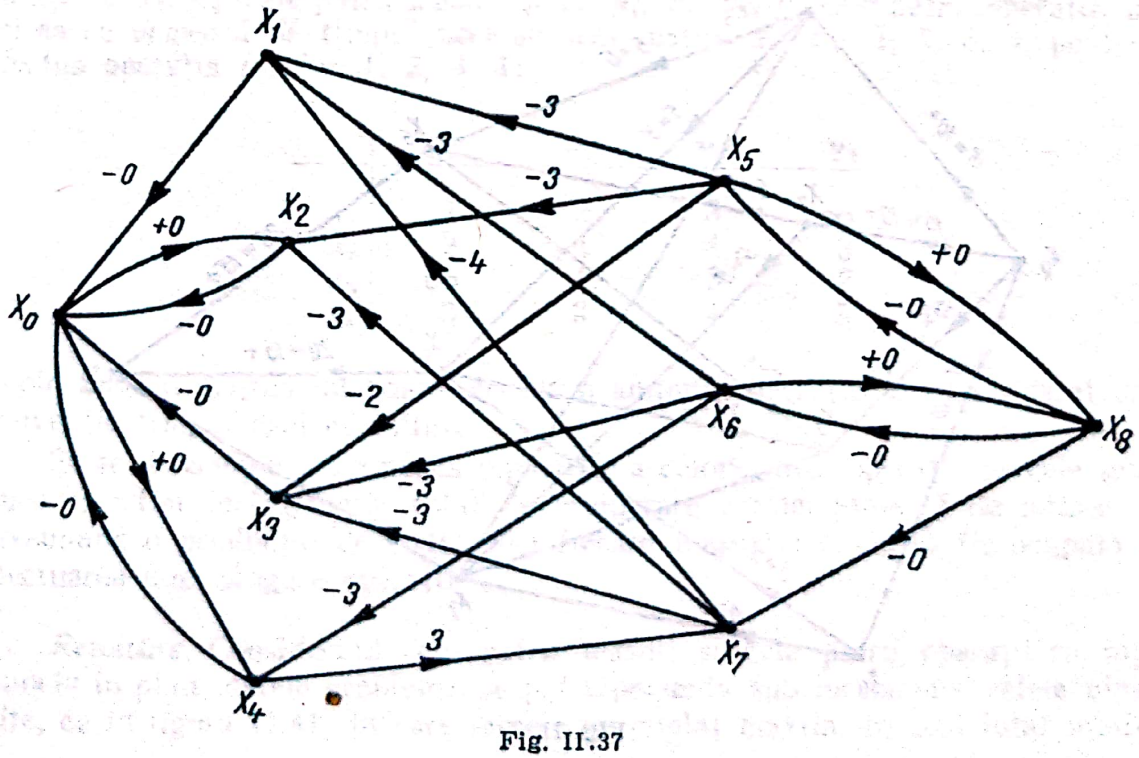


Fig. II.37

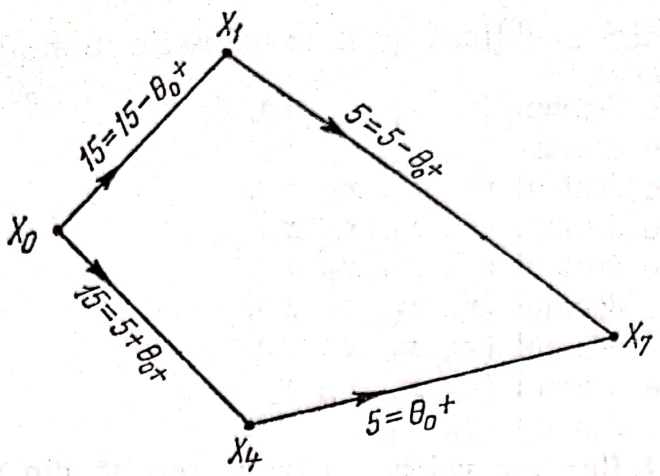


Fig. II. 38

Conform acestui circuit, modificăm fluxurile pe arcele (x_0, x_1), (x_0, x_4), (x_1, x_7) și (x_4, x_7), ca în figura II.38, unde determinăm valoarea lui θ_0 ca fiind egală cu cinci unități. Făcînd efectiv aceste modificări, obținem fluxul φ_1 din figura II.39, căruia îi corespunde un cost total egal cu:

$$f(\varphi_1) = f(\varphi_0) - \theta_0 \mid \text{val. } d_0\ (x_7, x_7) \mid = 135 - 5 = 130 \text{ u.b.}$$

Rețeaua $R(\varphi_1)$, corespunzătoare fluxului φ_1, este reprezentată în figura II.40, și se dovedește a nu avea nici un circuit de valoare strict negativă, ceea ce înseamnă că fluxul φ_1 este o soluție a problemei. În consecință, transportul produsului în discuție trebuie organizat conform fluxului φ_1, din figura II.39.

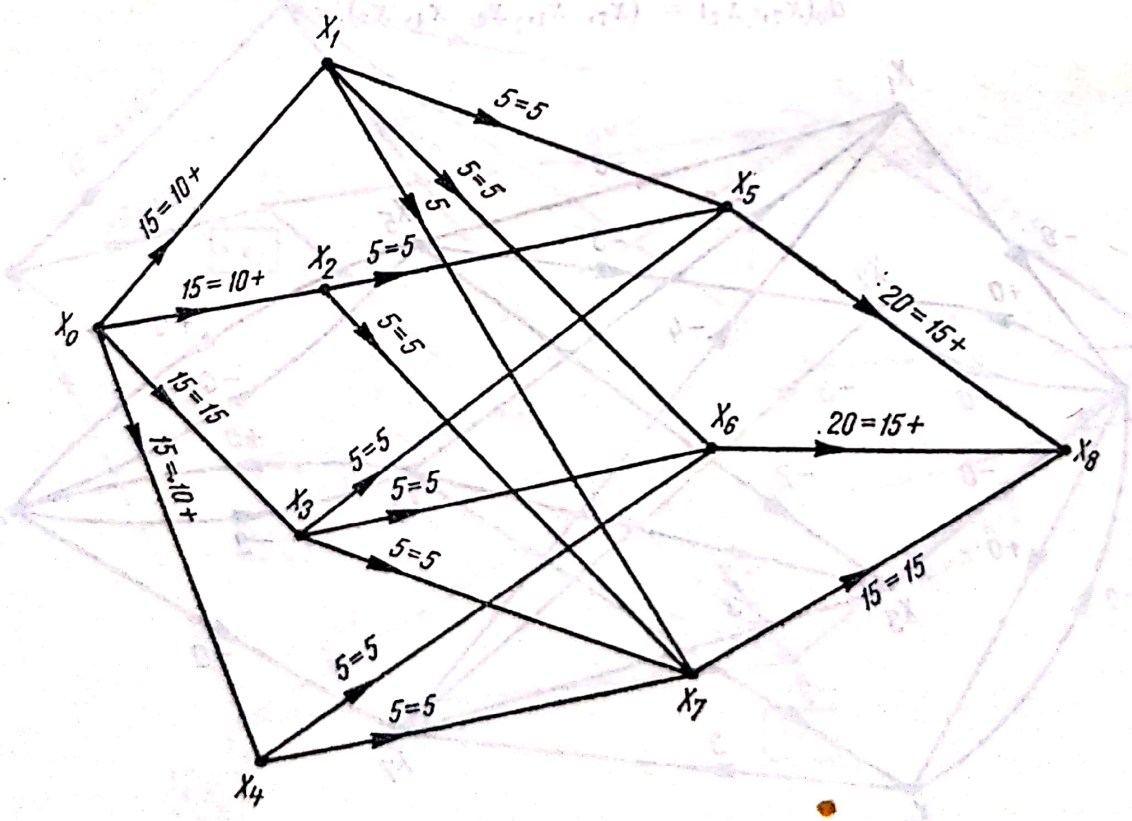


Fig. II. 39

Scanned with OKEN Scanner

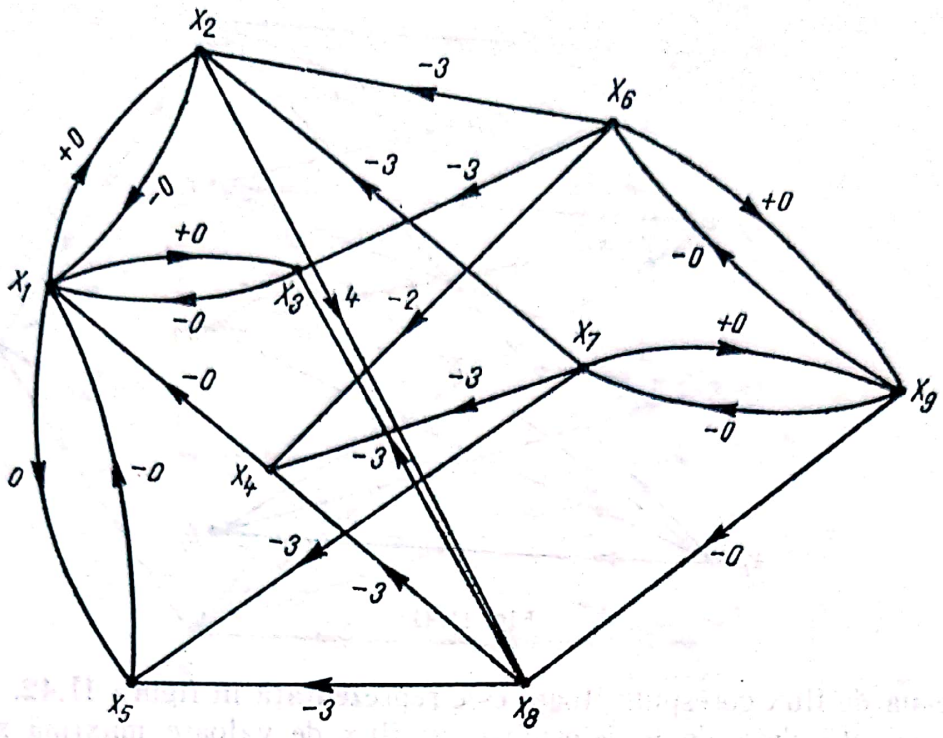


Fig. II.40

Problema 3. O piesă trebuie să treacă, în prelucrarea sa, prin patru operaţii, ce pot fi efectuate de patru maşini (fiecare maşină poate efectua oricare dintre cele patru operaţii). Datorită caracteristicilor tehnice diferite ale celor patru maşini, ele efectuează aceeaşi operaţie în timpuri diferite. Notînd cu x_1, x_2, x_3, x_4 cele patru maşini şi cu y_1, y_2, y_3, y_4 cele patru operaţii, matricea ce urmează dă timpul necesar unei maşini x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, pentru a efectua operaţia y_j, $j = 1, 2, 3, 4$:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	4	2	3	∞
x_2	2	4	4	3
x_3	∞	1	3	5
x_4	3	3	4	5

Acolo unde o maşină nu poate efectua o anumită operaţie, s-a considerat prin convenţie timpul egal cu infinit.

Să se determine o asemenea repartiţie a celor şapte operaţii pe cele şapte maşini, astfel încît timpul total de prelucrare a unei piese să fie minim. Se presupune o producţie de serie, deci fiecare maşină trebuie să fie ocupată cu efectuarea unei singure operaţii.

Rezolvare. Considerînd cele patru maşini şi cele patru operaţii ca nişte puncte în plan, datele problemei se pot reprezenta sub forma unei reţele bipartite, ca în figura II.41, în care se cere un cuplaj maxim, cu cost total minim.

Scanned with OKEN Scanner

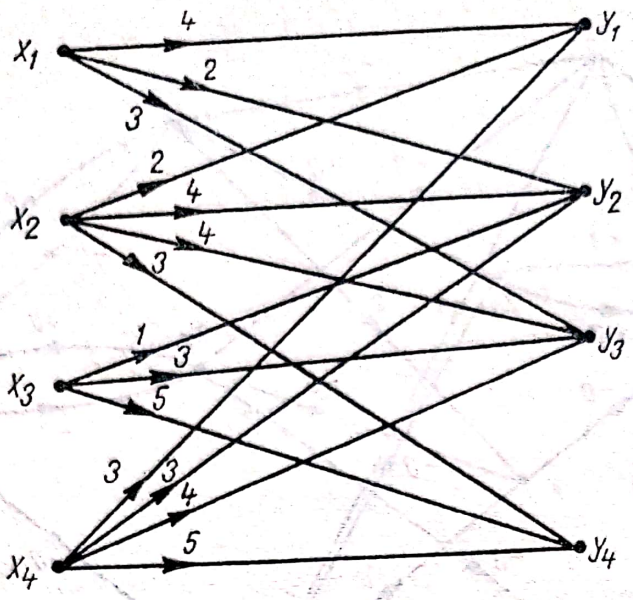


Fig. II.41

Rețeaua de flux corespunzătoare este reprezentată în figura II.42, problema fiind de această dată de a determina un flux de valoare maximă și cu cost total minim.

În figura II.43 este construit un flux inițial, de valoare egală cu 4 unități, și cu cost total corespunzător egal cu 12 unități. Datorită formei particulare a

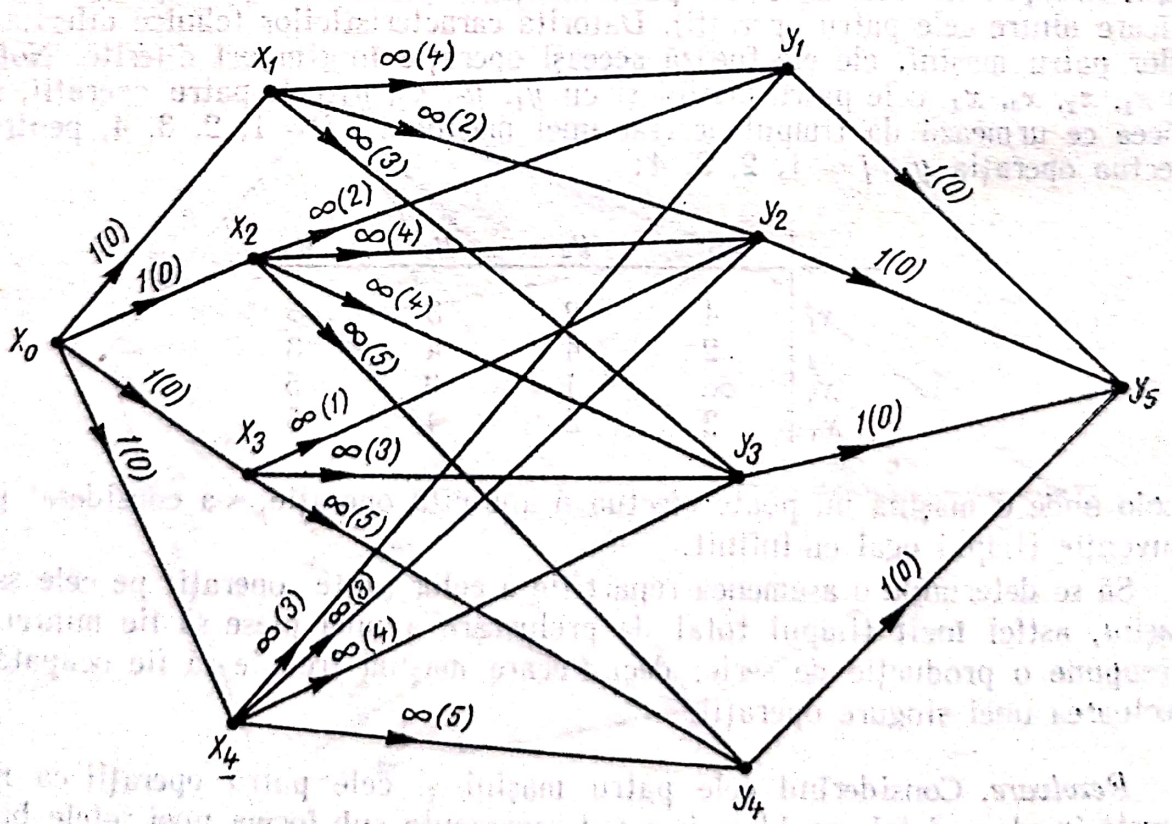


Fig. II.42

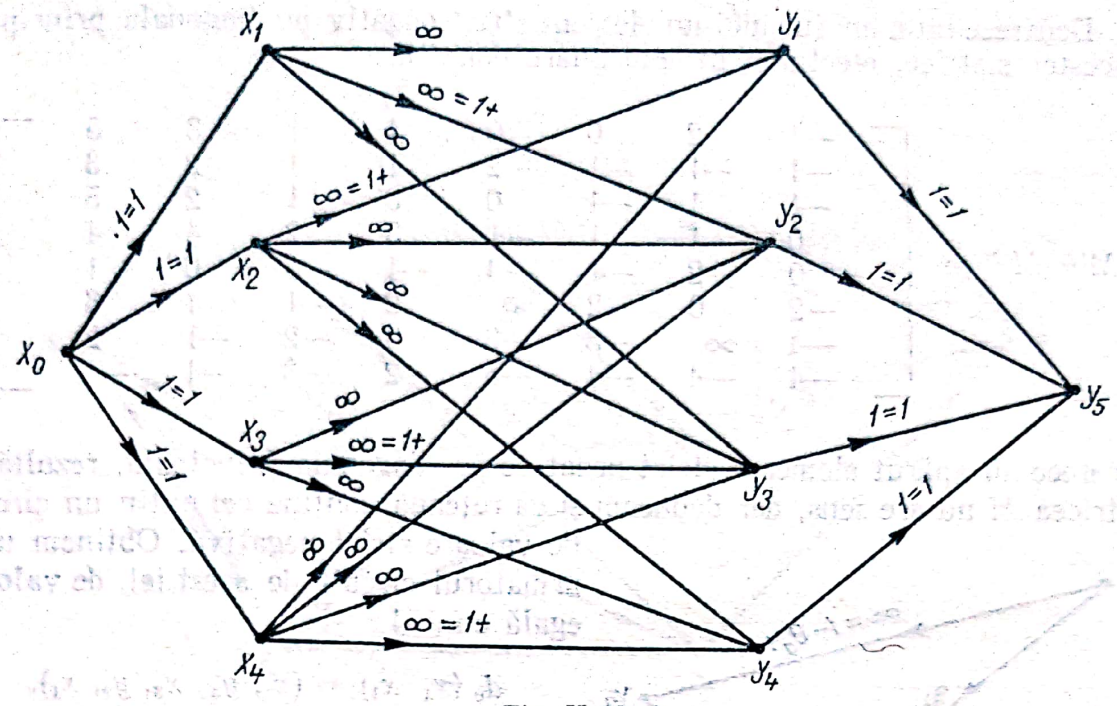


Fig. II.43

problemei, din rețeaua ajutătoare vom neglija vîrfurile x_0 și x_5, astfel încît matricea ponderilor acestei rețele capătă următoarea formă:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	∞	∞	∞	4	2	3	∞
x_2	∞	0	∞	∞	2	4	4	3
x_3	∞	∞	0	∞	∞	1	3	5
x_4	∞	∞	∞	∞	3	3	4	5
y_1	∞	−2	∞	∞	0	∞	∞	∞
y_2	−2	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞
y_3	∞	∞	−3	∞	∞	∞	0	∞
y_4	∞	∞	∞	−5	∞	∞	∞	0

După cum se vede, prin partiționarea acestei matrice, ea poate fi scrisă ușor din matricea ce conține datele problemei, fără a mai reprezenta geometric rețeaua $R(\varphi_0)$.

Pentru a determina matricea M, corespunzătoare rețelei $R(\varphi_0)$, vom aplica algoritmul operațiilor cu matrice pătrate. Pentru aceasta, efectuăm mai întîi următoarea operație:

$$M^{(c)} = L^*L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \infty & 4 & 2 & 3 & \infty \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & \infty & 0 & 0 & \infty & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ \infty & -2 & \infty & \infty & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & \infty & -3 & \infty & 2 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & -3 & \infty & \infty & -2 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & -5 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece nu a apărut nici un element strict negativ pe diagonala principală a acestei matrice, efectuăm în continuare operaţia:

$$M^{(2)}*M^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & \infty & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & \infty & -3 & -3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -5 & -2 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece au apărut elemente strict negative pe diagonala principală, rezultă că matricea M nu are sens, dar deducem şi că reţeaua conţine cel puţin un circuit de valoare strict negativă. Obţinem uşor următorul circuit de acest fel, de valoare egală cu —1:

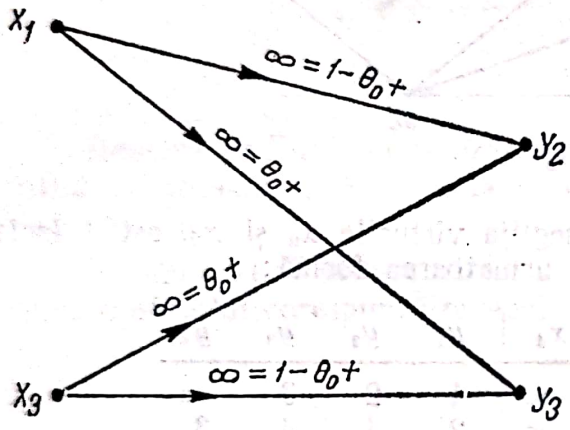


Fig. II.44

$$d_0(x_1, x_1) = (x_1, y_3, x_3, y_2, x_1).$$

Se vor efectua în fluxul φ_0 modificările indicate în figura II.44 pentru $\theta_0 = 1$. În acest fel, obţinem un nou flux în reţeaua dată, pe care îl notăm cu φ_1 şi care este reprezentat în figura II.45. Costul total ataşat lui este egal cu:

$$f(\varphi_1) = 12 - 1 = 11 \text{ unităţi}.$$

În cea de a doua iteraţie a algoritmului, scriem matricea ponderilor arcelor reţelei $R(\varphi_1)$, corespunzătoare noului flux găsit:

(L)

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	∞	∞	∞	4	2	3	∞
x_2	∞	0	∞	∞	2	4	4	3
x_3	∞	∞	0	∞	∞	1	3	5
x_4	∞	∞	∞	∞	3	3	4	5
y_1	∞	2	∞	∞	0	∞	∞	∞
y_2	∞	∞	—1	∞	∞	0	∞	∞
y_3	—3	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞
y_4	∞	∞	∞	—5	∞	∞	∞	0

Calculînd succesiv matricele:

$$M^{(2)} = L * L,$$

$$M^{(4)} = M^{(2)} * M^{(2)},$$

Scanned with OKEN Scanner

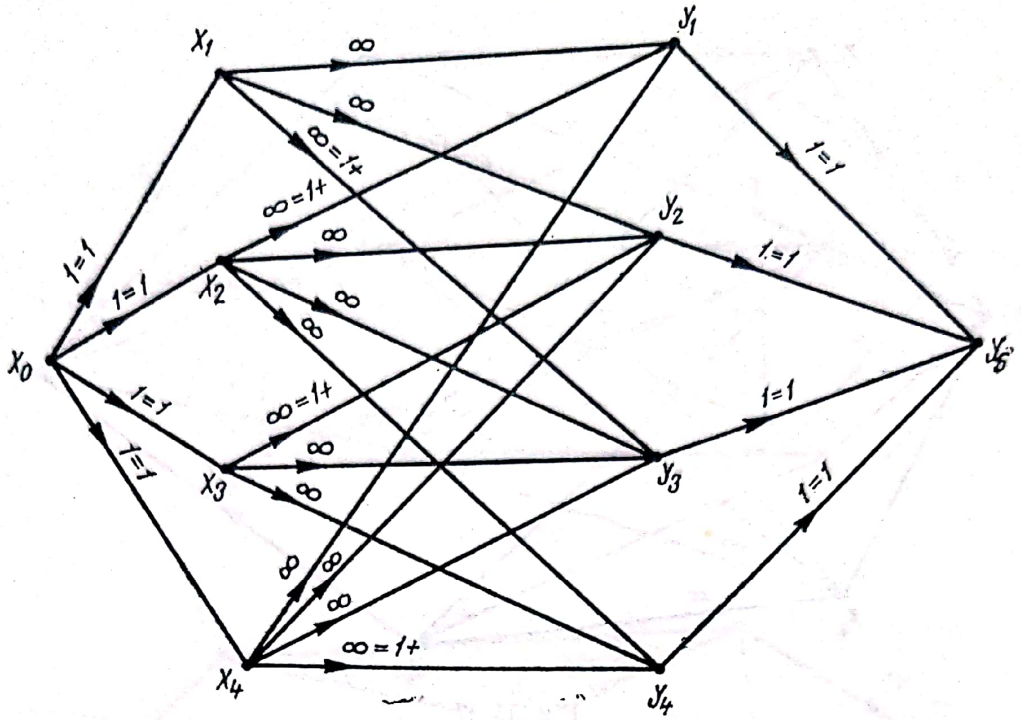


Fig. II.45

obținem următoarea matrice, care indică faptul că rețeaua $R(\varphi_1)$ conține cel puțin un circuit de valoare strict negativă:

$(M^{(4)})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	2	1	0	2	2	3	5
x_2	—1	—1	0	—2	1	1	2	3
x_3	0	1	0	0	1	1	3	5
x_4	1	1	2	—1	3	3	4	4
y_1	—1	—2	1	—4	—1	—2	0	1
y_2	—1	—2	—1	—1	0	0	2	1
y_3	—3	—1	—2	∞	—1	—1	0	2
y_4	—4	—4	—3	—5	—2	—2	—1	0

Se găsește astfel următorul circuit a cărui valoare este egală cu —1:

$$d_1(x_2, x_2) = (x_2, y_4, x_4, y_1, x_2).$$

Efectuînd modificările fluxului φ_1, indicate în figura II.46 pentru $\theta_1 = 1$, obținem fluxul φ_2 din figura II.47, căruia îi corespunde un cost total egal cu:

$$f(\varphi_2) = 11 - 1 = 10 \text{ unități.}$$

Cea de a treia iterație a algoritmului arată că rețeaua $R(\varphi_2)$, asociată fluxului φ_2, nu conține nici un circuit de valoare strict negativă, ceea ce înseamnă că fluxul φ_2 are un cost total minim, în raport cu toate

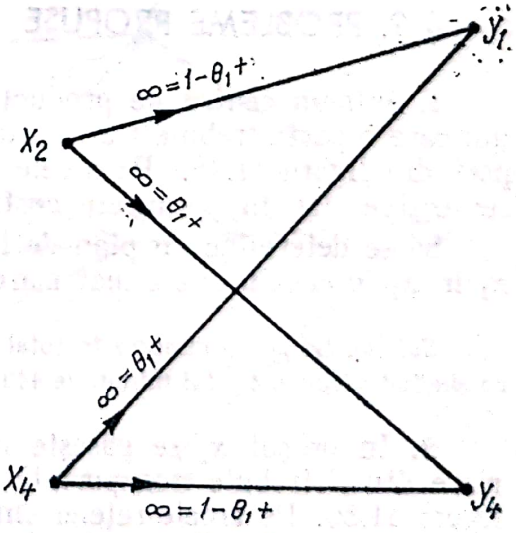


Fig. II.46

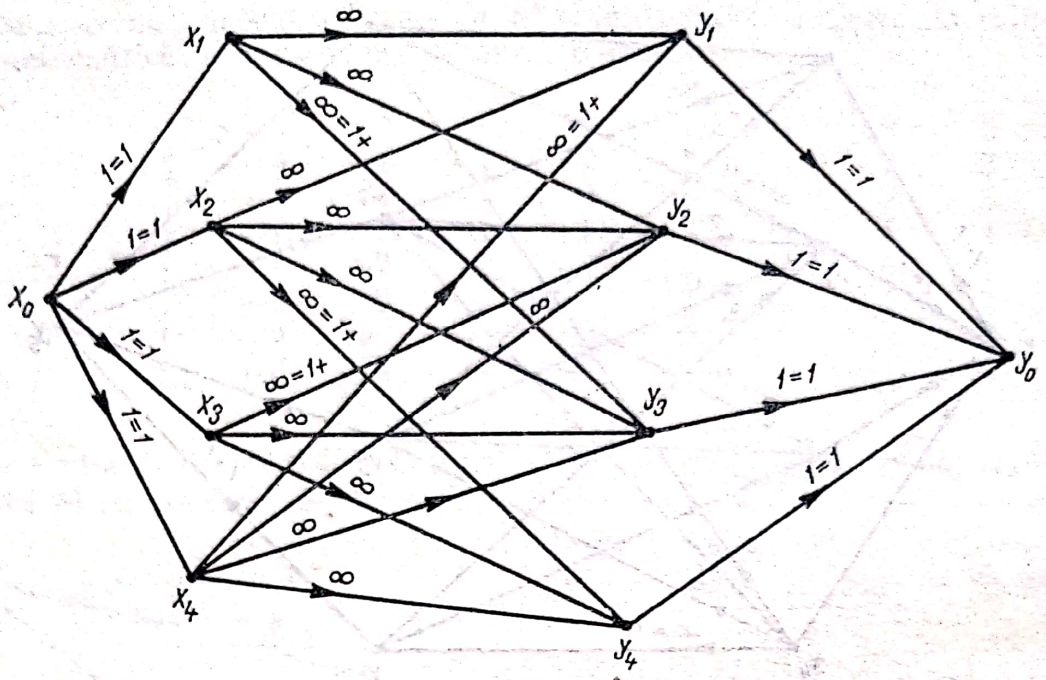


Fig. II.47

fluxurile de valoare maximă. Lăsăm pe seama cititorului efectuarea calculelor respective.

Interpretînd soluţia obţinută, rezultă următoarea repartiţie a maşinilor pe cele patru operaţii:

— maşina x_1 va efectua operaţia y_3;
— maşina x_2 va efectua operaţia y_4;
— maşina x_3 va efectua operaţia y_2;
— maşina x_4 va efectua operaţia y_1.

Această repartiţie va conduce la un timp total minim de prelucrare a unei piese, egal cu 10 unităţi de timp.

§ 9. PROBLEME PROPUSE

1. Într-un centru de producţie x_1, se găseşte o mare cantitate de produs, din care o parte trebuie transportată în centrul x_{10}, cu ajutorul reţelei de transport din figura II.48. Pe arcele reţelei sînt trecute capacităţile de transport respective, iar în paranteze costurile unitare de transport corespunzătoare.

Să se determine un plan de transport prin care să se poată transporta din x_1 în x_{10} o cantitate cît mai mare, costul total de transport fiind cît mai mic.

Soluţie. Se pot transporta în total cel mult 52 unităţi, conform fluxului din figura II.49, conducînd la un cost total minim de 448 u.b.

2. În oraşul x_1 se găseşte un produs în cantitate mare. O parte cît mai mare din el trebuie transportată în oraşul x_8, folosind reţeaua de transport din figura II.50. Pe arcele reţelei sînt trecute capacităţile respective, iar în paranteze costurile unitare de transport corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

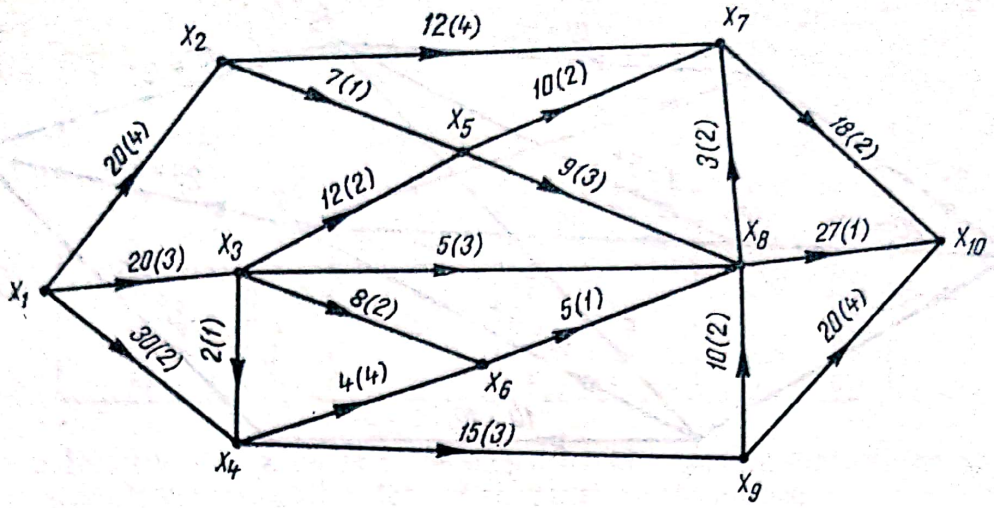


Fig. II.48

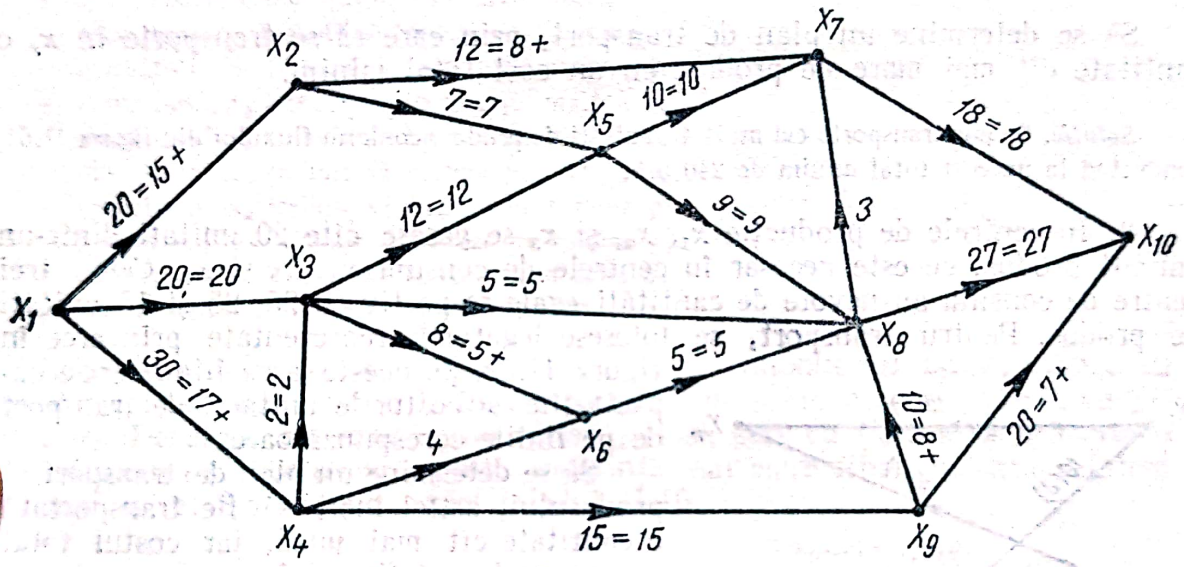


Fig. II.49

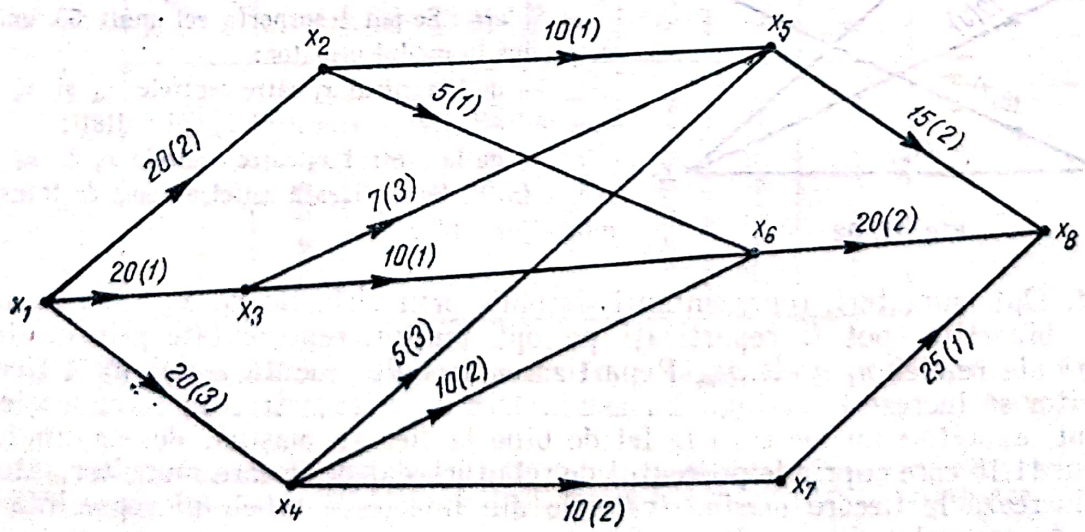


Fig. II.50

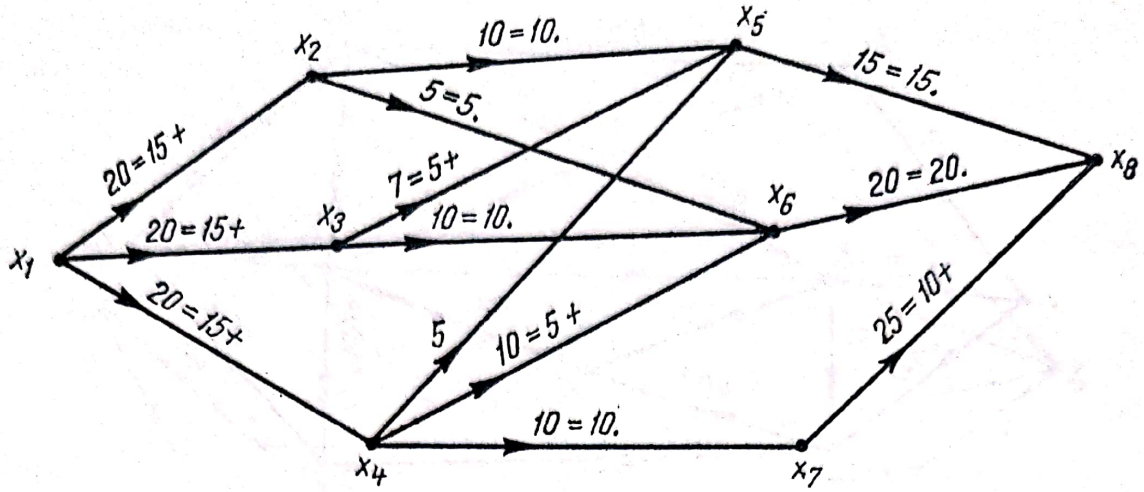


Fig. II.51

Să se determine un plan de transport, prin care să se transporte în x_8 o cantitate cît mai mare de produs, cu un cost total minim.

Soluție. Se pot transporta cel mult 45 unități de produs, conform fluxului din figura II.51, conducînd la un cost total minim de 240 u.b.

3. În centrele de producție x_1, x_2 și x_3 se găsesc cîte 20 unități dintr-un anumit produs, ce este necesar în centrele de consum x_4, x_5 și x_6. Cele trei centre de consum au nevoie de cantități egale respectiv cu 25, 25 și 15 unități de produs. Pentru transport, se folosesc legăturile reprezentate prin arce în figura II.52, pe aceste arce fiind scrise capacitățile și costurile unitare de transport de pe liniile corespunzătoare.

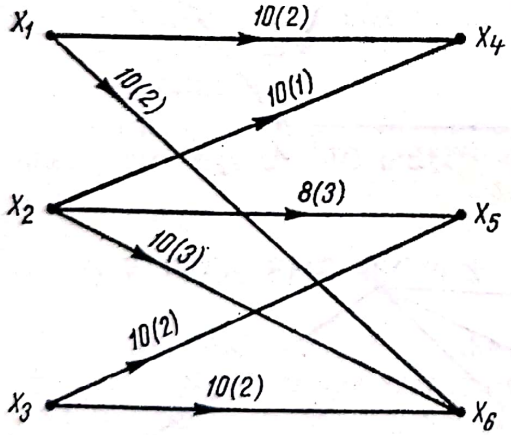


Fig. II. 52

Să se determine un plan de transport al produsului, astfel încît să fie transportată o cantitate cît mai mică, iar costul total corespunzător să fie minim.

Soluție: Se pot transporta cel mult 53 unități de produs în modul următor:

— de la centrul x_1 către centrele x_4 și x_6 cîte zece unități, iar către centrul x_5 opt unități;

— de la centrul x_3 către centrele x_5 și x_6 cîte zece unități. Se realizează astfel un cost de transport minim de 114 u.b.

4. Opt muncitori, reprezentanți simbolic prin vîrfurile x_1, x_2,...,x_8 ale unei rețele bipartite, pot fi repartizați pe opt mașini, reprezentate prin celelalte vîrfuri ale rețelei y_1, y_2,...,y_8. Repartizarea trebuie făcută astfel încît fiecare muncitor să lucreze la o singură mașină. Din experiența trecută se cunoaște că cei opt muncitori nu lucrează la fel de bine la fiecare mașină, determinîndu-se tabelul II.15 care cuprinde procentul de rebuturi dat de fiecare muncitor, atunci cînd lucrează la fiecare mașină (valorile din interiorul tabelului reprezintă numere de procente).

Scanned with OKEN Scanner

Tabelu II.15

x_i \ y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x_1	0,4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,4	0,4	0,1
x_2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,1
x_3	0,2	0,3	0,5	0,5	0,2	0,4	0,5	0,4
x_4	0,4	0,1	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2	0,4
x_5	0,3	0,4	0,4	0,4	0,1	0,3	0,4	0,5
x_6	0,4	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1	0,5	0,5
x_7	0,1	0,4	0,3	0,5	0,4	0,5	0,5	0,3
x_8	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,4	0,4	0,1

Să se determine o asemenea repartizare a celor opt muncitori pe cele opt mașini, astfel încît procentajul total de rebuturi să fie minim.

Soluție. Repartizarea optimă este următoarea:
— muncitorul x_1 trebuie să lucreze pe mașina y_7,
— muncitorul x_2 trebuie să lucreze pe mașina y_8,
— muncitorul x_3 trebuie să lucreze pe mașina y_2,
— muncitorul x_4 trebuie să lucreze pe mașina y_3,
— muncitorul x_5 trebuie să lucreze pe mașina y_6,
— muncitorul x_6 trebuie să lucreze pe mașina y_5,
— muncitorul x_7 trebuie să lucreze pe mașina y_1,
— muncitorul x_8 trebuie să lucreze pe mașina y_4.
Procentul mediu de rebuturi este de 0,2125%.

5. Șapte absolvenți ai unui institut, notați simbolic cu x_1, x_2,..., x_7, au aceeași medie de absolvire și trebuie repartizați pe șapte posturi, notate cu y_1, y_2,..., y_7. Deoarece nu există alte criterii, li se cere ca fiecare să dea cîte o notă între cinci și zece fiecărui post, preferința mai mare fiind indicată printr-o notă mai mare. S-a obținut astfel tabelul II.16.

Tabelul II.16

x_i \ y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	7	8	9	10	7	8	8
x_2	9	7	8	9	8	10	6
x_3	8	9	8	10	9	10	7
x_4	10	8	10	9	9	9	6
x_5	9	8	9	10	8	10	8
x_6	9	7	9	10	8	9	7
x_7	8	8	10	9	8	10	7

Să se efectueze o astfel de repartizare a celor șapte absolvenți care să mulțumească cît mai mult întreg sistemul format din acești absolvenți.

Soluție. Se scad toate elementele tabelului II.16 din zece, după care se caută repartiția cu cost total minim. Există mai multe astfel de repartiții, dintre care menționăm pe următoarea:

$$(x_1, y_4), (x_2, y_6), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_6, y_5), (x_7, y_3).$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. BELLMAN R. and KALABA R., „*On the best policies*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics" 8 (1960), 582.
2. BOCK F., KANTNER H. and HAYNES J., „*An algorithm, the best path algorithm for finding ranking paths through a network*". Research Report, Armour Research Foundation, Chicago (1957, November).
3. DANTZIG G. B, „*On the shortest route through a network*", Management Sciens 6 (1959) 187.
4. DANTZIG G. B., „*All shortest routes in a graph*", Operations Research House, Stamford University Tehnici Repot No. 66-3 (1966, November).
5. CHEN Y. C. and WING O., „*Connectivity of Directed Graphs*", Proc. of Sec. Anual Allerton Conference on Circuit and System Theory, University of Illinois, pp. 530—543, 1964.
6. DEMETROIU P., „*Analysis and Synthesis of probabilistic network*", Ph. D. Thesis, Columbia University, 1963.
7. BUSAKER R. and SAATY T., „*Finite graphs and networks*", Mac Grow Hill, 1965.
8. FLOYD R. W., „*Algorithm 97: shortest path*", Communications of the Association for Computing Machinery 5 (1962) 345.
9. HARARY F., NORMAN R. Z. and CORTWRIGHT D. „*Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*", J. Wiley and Sons Inc. New York; 1965.
10. FULKERSON D. R., „*Expected critical path lengths in PERT networks, particularly*", Section 5; „*Minimal paths in general networks*", Operations Research 10 (1962) 808.
11. FLOOD M. M., „*The traveling Salesman Problem*", Jr. of Operations Research, vol. 4, pp. 61—75, 1058.
12. ERDÖS P., RENYI A., „*On random graphs I*", Publ. Math., Debrecen, 1956.
13. FORD L. R. Jr. and FULKERSON D. R., „*Solving the Transportation Problem*", the Rand Corporation, RM — 1736 (1956). Prager W, „On the coterer Problem", Tehnical Report, Division of Applied Math. University (1956).
14. GILBERT E. N., „*Random graphs*", Ann. Math. Statistic, 1959.
15. KLEE V. L. TR., „*A string algorithm for shortest path in directed network*", Ap. Rev. Vol. 12, 1964.
16. IOSIFESCU M., MIHOC GH., TEODORESCU R., „*Teoria probabilităţilor şi statistica matematică*", Ed. Tehnică 1966.
17. KAUFMANN A., „*Introduction à la combinatorique en vue des applications*", Dunod, 1968.
18. HOLOMOS P.R. and VANGHAN H. E., „*The Marriage Problem*", American. Math. 72 (1950).
19. KUHN H. W., „*The Houngarian Method for Solving the Assignment Problem*", Naval Research Logistics Quarterly 2(1955) pp. 83—97.
    Neumann J-von, „A certain zero — Assignment Problem", Annales of the Stud. 28, Princenton University Pres (1953), pp. 1—12.
20. VĂDUVA I., DINESCU C., SĂVULESCU B., *Modele matematice în organizarea şi conducerea producţiei*" (Vol I, partea 1) Ed. Didactică şi Pedagogică, 1974.
21. VĂDUVA I., DINESCU C., SĂVULESCU B., „*Modele matematice în organizarea şi conducerea producţiei*" (vol. II, partea 1), Ed. Did. şi Ped. 1974.
22. IONESCU H., DINESCU C., SĂVULESCU B., „*Probleme ale cercetării operaţionale*", Ed. Didactică şi Pedagogică (1972).
23. HU T. C., „*The maximum capacity rute problem*", Operation Research 9(1961) 898.
24. TOMESCU I., „*Introducere în combinatorică*", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1972.
25. KALABA R., „*On some communication network problems*", Chapter 21 in Combinatorial Analysis R. Bellman and M. Hall Jr. (editors), 1960.
26. KLEE V., „*A string algorithm for shortest path in a directed network*", Operations Research 12 (1964) 428.
27. HARDGRAV W. W., „*On the relation between the traveling-salesman and the longest—path problems*", 1961.
28. IONESCU H., DINESCU C., BURLACU V., „*Teoria grafurilor cu unele aplicaţii în economie*", Ed. Ştiinţifică (1969).

Scanned with OKEN Scanner

29. FORD L. R., *"Network flow theory"*. Rand. Corp. 1956.
30. MINTHY G. J., *„A variant on the shotest route problem"*, Operations Research 6(1958)832.
31. MURCHLANDM J. D., *„A new method for finding all elementary paths in a complete directed graph"*, LBS-TNT-22 (1965 October).
32. NICHOLSON T. — A. J., *„Finding the shortest route between two points in a network"*, The Computer Journal 9 (1966, November) 275.
33. MAC CRIMON, KENUETH R. and RYAVEC, CHARLES A., *„An Analytical study of the PERT Assumption"*., Operations Research, 12 no. 1, 16—37 (1964).
34. MALCOM, DONALD G., ROSEBOOM, JOHN H., CLARK CHARLES E. and FAZAR, WILLARD, *„Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation"*, Operation Research, 7, no. 6, 646—669, 1101.
35. JEWELL W. S., *„Flow through networks"*, Interim Technical Report No. 8 MIT. 1972.
36. MAYDA W., *„Maximum flow through a Communications Network"*, Interim Tech. Rep. Nr. 13 Univ. of. Illinois Urbana, 1959.
37. MARTIN B. V., *„Minimum paths algorithms for transportation planning"*, Research Report R 63—52, Massachausetts, Institute of Technology, Departament of Civil Engineering (1963).
38. MURDOV V. I., *„Determining the shortest Hamilton paths in complete graph by methods of integer programming"*, Isv. A. N. Tekh. KIB. no. 2, 1965.
39. NEMIROVSKI A. M., *„The identification of simple elementary path in antisymetric graphs"*, Isv. A. N. Tekh. Kib. no. 3 (1968).
40. DRAGOMIRESCU M., *„L'algorithme de min-addition et les chemins critiques dans un graphe"*, Rev. Roum. de Math-pures, et appl., XII. no. 8, 1967, p. 1045—1051.
41. MARKOSIAN S. E., *„Matrix Criterion of the Uniquess of an Arc Basis and the Determination of a Certain Basis"*, Akad. Nauk Armin. SSR Doklady, vol. 46, no. 2, pp. 60—66, 1966.
42. PEART R. M., RANDONPH P. H. and BARTLETT T. E., *„The shortest route problem"*, Operations Research 8 (1960) 886.
43. POLLACK M., *„The maximum capacity route through a network"*, Operations Besearch 8 (1960) 733.
44. FRANK H., *„Shortest Paths, in probabilistic graphs"*, Journal of Emergensy W. Dc. 1968.
45. POCCOCK J. W., *„Pert Asan Analytical Aid for Programming* Sts. Payo-ff and Problems", Operations Research, 10 no. 6, 893—903 (1962).
46. PALASTI I., *„On the strong connectedness of directed graphs"*, St. Sci. Math. Hung. 1966.
47. PETEANU V., *„Optimal paths in networks and generalizations"*, I. II., Mathematica, vol. II (34) no. 2, 1969, p. 311—327 şi vol. 12 (35) no. 1, 1970, p. 151—186.
48. ORE O., *„Theory of Graphs"*, American Mathematical Societiy Colloquium, Publication, volume 38 (1962) 152-5.
49. THORELLI L—E., *„An algorithm for computing all paths in a graph BIT"*, (i. e—Nordisk Tidskrift for Informacions — Behandling) 6 (1966) 347. The algorithm actually finds all vertices reachable from each verte in a directes graph.
50. ROY B., *„Cheminement et Coonexité dans les graphes: Application aux Problèmes d'Ordonnancement"*, *Société d'Economie et de Mathematique Appliqée*, Paris, 1961.
51. ROBERTS S. M. and FLORES B., *„Systematic generation of Hamiltonian Circuits"*, Comm. of the ACM, vol. 9, pp 690—694, 1966.
52. VĂDUVA I., *„Posledovetelntie testi respredelenia exponentialnovo tipa"*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., tomm. VII, no. 4., 1962, p. 705—716.
53. WALD A., „Posledovatenîi analiz", I. L. Moskva, 1960.
54. THORELLI L. E., *„An algoritm for computing all path in a graph, BIT"*, 6/1967.
55. CHEN Y. C. and WING O., *„Connectivity of Directed Graphs"*, Proc. of. Sec. Ann, All, Conf. on Circuit and System Theory Univ. of. III, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III.

PROBLEME DE INVENTAR

§ 1. PROBLEME CARE CER OPTIMIZAREA STOCURILOR DE PRODUCȚIE

În practica economică se pune îndeosebi problema determinării cantităților cu care să se facă aprovizionarea (fabricarea) cu un anumit produs, uneori și a perioadelor la care să se facă această aprovizionare (fabricare), astfel încît cheltuielile ce se fac în legătură cu achiziționarea (producerea) și cu păstrarea produsului pînă la vînzare să fie cît mai mici.

Este evident că pentru a rezolva această problemă este necesar să avem anumite indicații asupra cererii produsului respectiv. Din acest punct de vedere, se deosebesc două cazuri, după cum cererea este cunoscută (determinată) sau întîmplătoare (aleatoare).

Cazul în care cererea este determinată. Aprovizionarea (producerea) unui produs se poate face — în cazul în care cererea acestui produs este cunoscută — la anumite intervale și cu anumite cantități astfel alese, încît cheltuielile totale pe unitatea de timp de aprovizionare (producere), de stocare, eventual și de penalizare, să fie minime. În cele ce urmează vom folosi următoarele notații:

a = cererea constantă pe unitatea de timp, astfel încît produsele sînt scoase din lot în mod continuu,

c = costuri unitare de cumpărare (producere),

h = costul de stocare pe unitatea de produs și pe unitatea de timp,

k = costul de lansare a unei comenzi, plătit la începutul fiecărei perioade de timp,

u = costul lipsei de stoc pe unitatea de produs și pe unitatea de timp, numit și cost de penalizare pentru lipsă de stoc,

$s(t)$ = valoarea stocului la momentul t,

Q = cantitatea cu care se face aprovizionarea (cantitatea produsă) pe o perioadă, această aprovizionare (producere) realizîndu-se în salturi constante în timp,

T = perioada de timp între două reîncărcări consecutive ale stocului, reîncărcarea stocului făcîndu-se de fiecare dată instantaneu,

C = costul total pe o perioadă a aprovizionării (producerii), stocării, eventual al lipsei de stoc.

În cazul în care nu se admite lipsa de stoc, cantitatea cu care trebuie să se facă aprovizionarea (cantitatea fabricată) într-o perioadă, precum și inter-

Scanned with OKEN Scanner

valul de timp la care trebuie să se facă această aprovizionare (fabricare) astfel încît cheltuielile totale să fie minime, sînt date de formulele următoare:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}}, \tag{1}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2k}{ah}}. \tag{2}$$

În aceste condiții se realizează cheltuieli minime pe o perioadă, date de formula:

$$C^* = 2k + c \cdot \sqrt{\frac{2ak}{h}}. \tag{3}$$

În cazul în care se admite lipsa de stoc, cantitatea cu care trebuie să se facă aprovizionarea (cantitatea fabricată) într-o perioadă, stocul maxim la începutul unei perioade (după aprovizionare, respectiv fabricare), precum și intervalul dintre două aprovizionări (produceri) consecutive, se calculează după formulele următoare:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}}, \tag{4}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{h+u}}, \tag{5}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2k}{ah}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}}. \tag{6}$$

Cu aceste valori, se obțin cheltuieli minime pe o perioadă dată de formula:

$$C^* = 2k + c \cdot \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \tag{7}$$

unde s-a notat cu ρ așa-numitul factor de ruptură a stocului, dat de raportul:

$$\rho = \frac{u}{h+u}. \tag{8}$$

Menționăm, în sfîrșit, un model de aprovizionare (fabricare) pe mai multe perioade egale și determinate și cu cereri diferite, cunoscute pe aceste perioade. Fie n astfel de perioade, notate cu 1, 2, 3,..., n, cererile din aceste perioade fiind egale respectiv cu r_1, r_2, r_3,..., r_n. Fie, de asemenea, h costul unitar de stocare pe o perioadă întreagă. Presupunînd că nu se admite lipsa de stoc, să notăm cu C_i costul total pe primele i produse, cînd se aplică o politică optimă. Cu aceste notații, se aplică următoarea formulă recensivă pentru calculul lui C_n:

$$C_n = \min_{j=1,\,2,\ldots,\,n} \{C_{j-1} + k + c\,(r_j + r_{j+1} + \ldots + r_n) + h\,[r_j + 2\,r_{j+1} + 3\,r_{j+2} + \ldots + (n-j+1)\,r_n]\}, \tag{9}$$

cu convenția că $C_0 = 0$. Această formulă arată că pentru a putea determina pe C_n, trebuie să calculăm în prealabil succesiv toate costurile C_1, C_2, C_3,..., C_{n-1}

Scanned with OKEN Scanner

pentru fiecare din ele aplicînd aceeaşi formulă în care înlocuim pe n cu 1, 2, 3, ...,n—1. Pentru a determina apoi cînd să se facă aprovizionarea (cînd să se producă) şi cu ce cantităţi se porneşte în sens invers de la C_n către C_0, considerăm perioadele j pentru care are loc valoarea minimă din formulă şi se ţine seama de faptul că aprovizionarea (fabricarea) se face numai în momentul cînd stocul este egal cu zero.

Cazul în care cererea este aleatoare. Există un număr mare de probleme puse de practica economică, în care este nevoie de comandarea (sau de producerea) unor cantităţi de mărfuri pentru a forma un stoc care să satisfacă pe o perioadă dată de timp o cerere aleatoare. În cele ce urmează vom considera stocarea unui singur produs în care funcţia de repartiţie a cererii pe o întreagă perioadă este cunoscută. Mai mult, vom presupune că variabila aleatoare ce reprezintă cererea pe această perioadă este continuă. De cele mai multe ori, funcţia de repartiţie corespunzătoare rezultă, în practică, printr-o operaţie de aproximare efectuată asupra unei variabile aleatoare discrete.

Pentru prezentarea modelelor ce urmează, vom face următoarele notaţii:

c — cheltuieli de producţie la unitatea de produs fabricată,

h — cheltuieli unitare de stocare pe o perioadă dată,

u — cheltuieli de penalizare, cu care nu s-a putut asigura cererea în perioada respectivă,

k — cheltuieli de lansare, necesare pregătirii producţiei pe perioada respectivă,

p — preţul unitar de vînzare a produsului,

x_0 — cantitatea de produs existentă în stoc la începutul perioadei, înainte de fabricare (stocul iniţial),

x — cantitatea de produs care există după fabricare, la începutul perioadei date (variabilă a problemei),

a — cantitatea optimă de produs, necesară la începutul perioadei (optim),

Y — variabila aleatoare cerere, egală cu cantitatea de produs ce se cere în timpul unei perioade. Considerăm o valoare oarecare y ($y>0$) a acestei variabile, notăm cu $F(y)$ funcţia de repartiţie a lui Y, iar cu $f(y)dy$ probabilitatea ca variabila Y să ia o valoare cuprinsă între y şi $y+dy$ ($f(y)$ este densitatea de probabilitate a lui Y).

Criteriul de alegere a unei politici optime de reaprovizionare va fi în general beneficiul mediu obţinut de întreprindere în procesul de producere-stocare-vînzare. Vom nota în general beneficiul obţinut prin funcţia $\Gamma(x)$ sau $\Gamma(x, x_0)$, după cum nu există sau există stoc iniţial. Evident, acest beneficiu este o variabilă aleatoare, interesîndu-ne în ce condiţii are loc maximul valorii sale medii.

În cazul unui model static, pe o singură perioadă, fără stoc iniţial, şi în care se iau în consideraţie numai cheltuielile de producţie, valoarea optimă a mărimii x (cantitatea ce trebuie produsă) se obţine din ecuaţia:

$$F(x) = \frac{p-c}{p}, \text{ cu } x \geqslant 0. \tag{10}$$

Deoarece înaintea acestei producţii nu a existat un stoc iniţial, rădăcina nenegativă a ecuaţiei de mai sus este chiar stocul optim, notat cu s.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd la modelul precedent și cheltuieli de stocare, putem avea două situații. În cazul în care cheltuielile de stocare se plătesc la începutul perioadei, deoarece ele se plătesc pe toată cantitatea produsă, cheltuielile unitare de producție pot fi mărite, înglobînd în ele și cheltuielile de stocare, soluția optimă fiind dată de o ecuație asemănătoare cu (1), în care înlocuim pe c cu $c+h$:

$$F(x) = \frac{p-c-h}{p}, \text{ cu } x \geqslant 0. \tag{11}$$

În practică însă, cheltuielile de stocare se plătesc numai la sfîrșitul perioadei, pe cantitatea rămasă nevîndută pînă în acest moment, astfel încît soluția problemei se obține prin rezolvarea ecuației:

$$F(x) = \frac{p-c}{p+h}, \text{ cu } x \geqslant 0. \tag{12}$$

Comparăm această valoare cu stocul inițial x_0 și putem avea următoarele situații:

— dacă $x_0 < s$, producem la începutul perioadei cantitatea $s - x_0$, pentru a completa stocul optim;

— dacă $x_0 \geqslant s$, nu producem la începutul perioadei respective.

Un al patrulea model adaugă la condițiile de mai sus și cheltuielile de lansare. Pentru rezolvarea unui astfel de model, introducem mai întîi următoarele notații:

$$L(x) = p\int_x^{\infty}(y-x)f(y)\,dy + h\int_o^{x}(x-y)f(y)\,dy, \tag{13}$$

$$q(x) = cx + L(x). \tag{14}$$

Pentru a determina politica optimală în acest model, este necesar mai întîi să calculăm mărimile s și s', definite cu ajutorul relațiilor următoare:

$$F(s) = \frac{p-c}{p+h}, \; s > 0, \tag{12'}$$

$$q(s') = k + q(s), \; s' \text{ cea mai mică rădăcină.} \tag{15}$$

Odată determinate aceste două numere, comparăm pe x_0 cu ele, avînd următoarele situații posibile:

— dacă $x_0 < s'$, fabricăm pînă la cantitatea s, adică $s - x_0$ unități de produs;

— dacă $x_0 \geqslant s'$, nu fabricăm.

În sfîrșit, un al cincilea model static, pe o singură perioadă, ține seama atît de stocul inițial, cît și de cheltuielile de producție, de stocare și de penalizare (sub formă de amendă). Un astfel de model se rezolvă în mod asemănător cu cel precedent, cu deosebirea că în locul funcției $L(x)$, vom folosi o alta, notată cu $\mathfrak{L}(x)$ și definită în modul următor:

$$\mathfrak{L}(x) = L(x) + u\int_x^{\infty}(y-x)f(y)\,dy, \tag{16}$$

cu $L(x)$ dat de (13).

Încheiem prezentarea modelelor aleatoare cu un model dinamic, pe două perioade (el poate fi ușor generalizat la mai multe perioade), în care considerăm stoc inițial, cheltuieli de producție și cheltuieli de stocare, cererile în cele două

Scanned with OKEN Scanner

perioade fiind date prin variabile aleatoare independente, cu aceeaşi distribuţie, a cărei densitate de posibilitate este $f(y)$, $y \geqslant 0$. Vom numerota mărimile referitoare la prima perioadă cu indicele 2, iar cele ce se referă la cea de a doua perioadă cu indicele 1 (indicii sînt legaţi de ordinea de determinare a acestor mărimi prin calcul). Pentru a calcula valorile s_2 şi s_1, ce reprezintă stocurile optime ce trebuie asigurate la începutul celor două perioade, procedăm după cum urmează.

Rezolvăm mai întîi ecuaţia:

$$F(x_1) = \frac{p-c}{p-h}, \text{ cu } x_1 \geqslant 0, \tag{12''}$$

a cărei rădăcină este egală cu s_1. Calculăm apoi succesiv următoarele funcţii:

$$\alpha(x_2) = \int_0^{x_2 - s_1} L(x_2 - y) f(y)\, dy + \int_{x_2 - x_1}^{\infty} [c(s_1 - x_2 + y) + L(s_1)] f(y)\, dy, \tag{17}$$

$$\chi(x_2) = c(x_2 - x_2^0) + L(x_2) + \alpha(x_2). \tag{18}$$

Valoarea s_2 se obţine ca rădăcină a ecuaţiei

$$\chi'(x_2) = 0, \tag{19}$$

considerînd ca variabilă independentă pe x_2.

Determinînd astfel stocurile optime s_1 şi s_2 cu ajutorul relaţiilor (12'') şi (19), politica optimală pe cele două perioade cere fabricarea următoarelor cantităţi:

— dacă $x_2^0 < s_2$, fabricăm la începutul perioadei întîi $s_2 - x_2^0$ unităţi de produs;

— dacă $x_2^0 \geqslant s_2$, nu fabricăm la începutul perioadei întîi;

— dacă $x_1^0 < s_1$ (x_1^0 fiind cantitatea rămasă din perioada scursă), fabricăm la începutul perioadei a doua $(s_1 - x_1^0)$ unităţi de produs;

— dacă $x_1^0 \geqslant s_1$, nu fabricăm la începutul perioadei a doua.

Observaţie. În cele de mai sus, s-au notat cu x_1^0 şi x_2^0 stocurile iniţiale din perioada a doua, respectiv din perioada întîi, dintre acestea x_2^0 fiind o constantă (stocul iniţial cu care se începe întregul proces), iar x_1^0 fiind cantitatea de produs care nu a putut fi vîndută în prima perioadă.

§ 2. PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Un produs are cererea de 1 000 bucăţi pe lună şi produsele sînt solicitate uniform. Costul lansării unei comenzi este de 5 000 lei. Costul producţiei este de 10 lei pe bucată, iar costul păstrării inventarului este de 1 leu pe bucată în timp de o lună.

a) Presupunînd că lipsa de stoc nu este permisă, să se determine la ce intervale să se fabrice produsul şi în ce cantităţi, astfel încît cheltuielile totale să fie minime.

b) Presupunînd că este permisă lipsa de stoc, cu un cost de penalizare de 2 lei pe bucată în timp de o lună, să se determine intervalele de fabricaţie, cantităţile ce trebuie produse şi stocul maxim la început de lună, astfel încît cheltuielile totale să fie minime.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Sîntem în fața unui model cu cerere deterministă, care nu permite lipsă de stoc. Avem următoarele date:

$a = 1\,000$ buc./lună, $\quad c = 10$ lei /buc.,
$k = 5\,000$ lei, $\quad h = 1$ buc./lună.

Înlocuind în formulele (1) și (2), obținem:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,000 \cdot 5\,000}{1}} \approx 3\,170 \text{ bucăți},$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = 3{,}17 \text{ luni} \approx 95 \text{ zile}.$$

b) Adăugînd la datele de mai sus pe:

$$u = 2 \text{ lei/buc./lună},$$

obținem cu ajutorul formulelor (4), (5) și (6):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \approx 3\,867 \text{ buc.},$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{h+u}} \approx 2\,590 \text{ buc.},$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} \approx 3{,}9 \text{ luni} \approx 117 \text{ zile}.$$

Problema 2. O întreprindere ce produce un anumit tip de mașini primește o comandă pentru 4 000 mașini, pe care trebuie să le furnizeze în timp de un an.

Cheltuielile legate de expedierea unui lot de mașini sînt de 3 600 lei, iar cele legate de stocarea unei mașini sînt de 20 lei pe zi. Producerea unei mașini conduce la cheltuieli în valoare de 10 500 lei.

a) Presupunînd că nu este permisă lipsa de stoc, să se determine în ce cantități să se fabrice mașinile și la ce intervale, astfel încît cheltuielile totale să fie minime. Să se determine apoi aceste cheltuieli.

b) Presupunînd că se admite lipsa de stoc, cu cheltuieli de penalizare de 80 lei pe zi pentru fiecare mașină cu care nu se asigură cererea, să se determine intervalele de fabricație, numărul de mașini ce trebuie fabricate într-un interval și numărul maxim de mașini ce există în stoc astfel încît cheltuielile totale să fie minime. Să se calculeze și cheltuielile respective pe o perioadă diferită de cea finală.

Rezolvare. a) Considerînd drept unitate de timp ziua, avem următoarele date:

$$a = 400 \text{ buc./an} = \frac{400}{360} \text{ buc./zi} = \frac{10}{9} \text{ buc./zi},$$

$$k = 3\,600 \text{ lei}, \quad c = 10\,500 \text{ lei/buc.}, \quad h = 20 \text{ lei/buc./zi}.$$

Folosind formulele (1) și (2), obținem:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = 20 \text{ buc.}, \qquad T^* = \frac{Q^*}{a} = 18 \text{ zile}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cheltuielile totale pe o perioadă se calculează cu formula (3), conducînd la valoarea următoare:

$$C^* = 2k + c\sqrt{\frac{2ak}{h}} = 217\,200 \text{ lei.}$$

Deoarece într-un an vor fi $\frac{360}{18}$ perioade, în tot cursul anului se vor cheltui în total:

$$217\,200 \cdot 20 = 4\,344\,000 \text{ lei.}$$

b) Adăugăm la datele problemei și:

$$u = 80 \text{ lei/buc./zi,}$$

și calculăm mai întîi cu formula (8) factorul de ruptură a stocului:

$$\rho = \frac{u}{h+u} = \frac{80}{20+80} = 0{,}8.$$

Cu ajutorul acestui factor, calculăm folosind formulele (4), (5) și (6):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \approx 23 \text{ bucăți,}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \sqrt{\rho} \approx 18 \text{ bucăți,}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} \approx 20 \text{ zile.}$$

Cheltuielile totale pe o perioadă sînt date de formula (7):

$$C^* = 2k + c\sqrt{\frac{2ak}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \approx 242\,400 \text{ lei.}$$

Problema 3. Un depozit al unei fabrici se aprovizionează cu stofă produsă de fabrică pe care o repartizează apoi sectoarelor pentru confecționare. Să se stabilească planul optim de aprovizionare, știind că aprovizionarea este făcută la intervale de timp egale, cu cantități egale, nepermițîndu-se lipsa de stoc. Pe baza datelor din evidența depozitului se cunosc următoarele cheltuieli lunare în legătură cu stocarea:

— cheltuieli cu lumina	540 lei
— cheltuieli cu apa	120 lei
— cheltuieli sanitare	80 lei
— amortizarea clădirii	4 730 lei
— încălzire	270 lei
— retribuția magazionerului	1 480 lei
— retribuția gestionarului	1 720 lei
— retribuția manipulanților (3)	3 360 lei
— amortizare electrocare	1 920 lei
TOTAL:	14 220 lei

Din suprafața depozitului se folosesc 40% pentru stocarea acestor țesături. Cantitatea medie lunară, care se cere și cu care se aprovizionează depozitul, este cunoscută, de 65 000 m.p. țesătură.

Scanned with OKEN Scanner

Tot din evidența depozitului, se cunosc următoarele, în legătură cu cheltuielile făcute de la darea unei comenzi pînă în momentul intrării și recepționării țesăturilor în depozit:

— retribuția unui funcționar de la serv. aprov. . . 1 300 lei
— retribuția unui merceolog . . . . . 2 340 lei
— retribuția unui achizitor . . . . . 1 870 lei
— imprimate, hîrtie etc. . . . . 65 lei
— telefoane . . . . . 135 lei
— alte cheltuieli . . . . . 270 lei

Se mai știe și timpul afectat de fiecare lucrător al depozitului pentru o comandă și anume:

— funcționarul de la serv. aprov. . . . . 24 ore
— merceologul . . . . . 20 ore
— achizitorul . . . . . 40 ore

Costul aproximativ al unui m.p. țesătură din lînă este de 190 lei.

Rezolvare. Vom considera luna ca avînd 26 de zile lucrătoare, ziua de lucru de opt ore. În aceste condiții, o lună va avea 208 ore de lucru.

Pentru calculul costului de stocare pe unitatea de produs și pe unitatea de timp (ziua), vom ține seama de faptul că țesăturile ocupă numai 40% din capacitatea depozitului, astfel încît obținem:

$$h = \frac{40}{100} \cdot \frac{14\,220}{2\,665\,000} \approx 0{,}003365 \text{ lei/zi/m.p.}.$$

Pentru calculul costului de lansare a unei comenzi, vom ține seama mai întîi de cotele din retribuțiile funcționarului, merceologului și achizitorului, corespunzătoare comenzii și anume:

— pentru funcționar: $\frac{1\,300}{208} \cdot 24$ lei,

— pentru merceolog: $\frac{2\,340}{208} \cdot 20$ lei,

— pentru achizitor: $\frac{1\,870}{208} \cdot 40$ lei,

apoi celelalte cheltuieli. Vom obține în acest fel:

$$k = \frac{1\,300}{208} \cdot 24 + \frac{2\,340}{208} \cdot 20 + \frac{1\,870}{208} \cdot 40 + 65 + 135 + 270 \approx 1\,205 \text{ lei}.$$

În plus, avem din datele problemei:

$$a = 65\,000 \text{ m.p./lună} = \frac{65\,000}{26} \text{ m.p./zi} = 2\,500 \text{ m.p./zi},$$

$$c = 190 \text{ lei/m.p.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formulele (1), (2) și (3) corespunzătoare modelului cu cerere cunoscută, în care nu este permisă lipsa de stoc, obținem:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,500 \cdot 1\,205}{0{,}003365}} \approx 42\,317 \text{ m.p.},$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2k}{ah}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,205}{2\,500 \cdot 0{,}003365}} \approx 17 \text{ zile},$$

$$C^* = 2k + c \cdot Q^* = 2 \cdot 1205 + 190 \cdot 42\,317 = 8\,042\,640 \text{ lei/perioadă}.$$

În concluzie, depozitul trebuie să se aprovizioneze la intervale egale, de cîte 17 zile, cu cantități egale cu 42 317 m.p. Această politică de aprovizionare conduce la cheltuieli minime, de producție și de stocare, cantitățile cu care se aprovizionează depozitul indicînd de fapt planul de producție al fabricii.

Problema 4. O întreprindere producătoare de aparate electrice de măsură și control are o comandă de 100 000 bucăți voltmetre și 25 000 bucăți ampermetre, pe care urmează să le fabrice în loturi egale, la intervale de timp egale. Cererea fiind cunoscută și uniformă în timp, trebuie onorată pe o perioadă de un an de zile. Cheltuielile de producție pe unitatea de produs sînt de 1000 lei pentru un voltmetru și 900 lei pentru un ampermetru. Costul de lansare a unei comenzi este de 12 960 lei pentru fiecare din cele două tipuri de aparate, iar costul de stocare este de 2 lei pe zi și aparat (indiferent de timp). Să se determine care este lotul optim, perioada optimă de fabricare și cheltuielile totale minime, astfel încît întreprinderea să nu aibă întîrzieri privind livrarea aparatelor la beneficiari.

Rezolvare. Se arată că în cazul unei gestiuni de mai multe produse, formulele sînt cele indicate pentru un singur produs, dar aplicate la fiecare produs în parte. În cazul stocării voltmetrelor, avem următoarele date:

$$a = 100\,000 \text{ buc./an} = \frac{100\,000}{360} \text{ buc./zi}, \qquad c = 1000 \text{ lei/buc.},$$

$$k = 1296 \text{ lei}, \qquad h = 2 \text{ lei/zi. buc.}$$

Aplicînd formulele (1), (2) și (3), obținem:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,000 \cdot 1\,296}{2 \cdot 360}} = 600 \text{ buc.},$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2k}{ah}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 360 \cdot 1\,296}{100\,000 \cdot 2}} = 21{,}6 \text{ zile},$$

$$C^* = 2k + c \cdot Q^* = 2 \cdot 1\,296 + 1\,000 \cdot 600 = 602\,592 \text{ lei}.$$

În cazul stocării ampermetrelor, avem:

$$a = 25\,000 \text{ buc./an} = \frac{25\,000}{360} \text{ buc./zi}, \qquad c = 900 \text{ lei/buc.},$$

$$k = 1\,296 \text{ lei}, \qquad h = 2 \text{ lei/zi. buc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd aceleaşi formule, obţinem:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,000 \cdot 1\,296}{2 \cdot 360}} = 300 \text{ buc.},$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2k}{ah}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,296 \cdot 360}{25\,000 \cdot 2}} = 43{,}2 \text{ zile},$$

$$C^* = 2k + cQ^* = 2 \cdot 1\,296 + 900 \cdot 300 = 272\,592 \text{ lei}.$$

Problema 5. O întreprindere trebuie să producă piese din grupa de produse — piese turnate din oţel — pentru a satisface cererea din contractele încheiate cu diverşii beneficiari pe anul ce urmează, cerere eşalonată pe cele patru trimestre ale anului.

Producţia începe la 1 ianuarie fără stoc iniţial şi se încheie la 31 decembrie, de asemenea fără stoc. Livrările se fac la sfîrşitul fiecărui trimestru, cu cantităţile precizate în contractele încheiate, conform tabelului III.1. După cum se vede în acest tabel, costul de producţie al pieselor este diferit de la trimestru la trimestru datorită condiţiilor specifice acestor trimestre (încărcarea cu alte produse, preţul unor materii prime etc.).

Tabelul III.1

Trimestru	Contracte	Capacităţi	Cost (mii lei)
I	20	55	14
II	30	40	16
III	50	25	15
IV	40	50	17

Producţia excedentară a fiecărui trimestru poate fi livrată în lunile următoare ale trimestrelor, întreprinderea suportînd în acest caz cheltuielile de depozitare, de 2000 lei pentru 1000 bucăţi pe trimestru. Să se determine nivelul producţiei în fiecare din cele patru trimestre, astfel încît să se satisfacă contractele, cu cheltuieli totale minime.

Rezolvare. Notînd cu x_{ij} cantitatea de produse fabricată în trimestrul i şi livrată în trimestrul j, problema se poate modela cu ajutorul unui model de transport, avînd datele din tabelul III.2.

Rezolvînd acest model de tip transport, se obţine soluţia optimă din tabelul III.3. Cercetînd acest tabel, observăm următoarele cantităţi ce trebuie produse şi livrate:

— producţia trim. I vîndută în trim. I — 20 mii buc.,
— producţia trim. I vîndută în trim. II — 30 mii buc.,
— producţia trim. II vîndută în trim. III — 25 mii buc.,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.2

Trim.	Tr. I	Tr. II	Tr. III	Tr. IV	Capacit.
I	14	16	18	20	55
II	∞	16	18	20	40
III	∞	∞	15	17	25
IV	∞	∞	∞	17	50
Contr.	20	30	50	40	140 / 170

Tabelul III.3

X	Tr. I	Tr. II	Tr. III	Tr. IV	Stoc
I	20	30			5
II			25		15
III			25		
IV				40	10

— producția trim. III vîndută în trim. III — 25 mii buc.,
— producția trim. IV vîndută în trim. IV — 40 mii buc.,
— $X_{15} = 5$, dacă folosim întreaga capacitate a trim.I, rămîn în stoc 5 mii buc.,
— $X_{45} = 10$, dacă folosim întreaga capacitate a trim. IV, rămîn în stoc 10 mii buc.

În aceste condiții, contractele sînt satisfăcute cu un cost de 2 215 lei.

Problema 6. Cererea unui produs este diferită pe patru luni notate cu 1, 2, 3, 4, fiind dată de cantitățile următoare:

$$r_1 = 25 \text{ unități}, \qquad r_2 = 30 \text{ unități},$$
$$r_3 = 20 \text{ unități}, \qquad r_4 = 25 \text{ unități}.$$

Știind că costul lansării producției pe o lună este de 1 000 lei, costul producției este de 50 lei pe unitatea de produs, iar costul stocării este de 5 lei pe lună pentru o unitate de produs, să se alcătuiască un plan de producție pe cele patru luni, astfel încît costul total de producție și de stocare să fie minim.

Rezolvare. Notînd cu C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, costul total pe primele i perioade, cînd se aplică o politică optimă, vom aplica formula recursivă (9), pentru a calcula succesiv valorile C_1, C_2, C_3, C_4.

Înlocuind în formula (9) mai întîi $n = 1$ și considerînd $C_0 = 0$, obținem:

$$C_1 = \min_{j=1} \{C_0 + k + cr_1 + hr_1\} = 0 + 1\,000 + 50 \cdot 25 + 5 \cdot 25 = 2\,375 \text{ lei.}$$

Înlocuind apoi, în aceeași formulă $n = 2$, obținem:

$$C_2 = \min_{j=1,2} \{C_{j-1} + k + c(r_j + r_{j+1} + \ldots + r_2) + h[r_j + 2r_{j+1} + \ldots + (3 - j)r_2]\} = \min\{C_0 + k + c(r_1 + r_2) + h(r_1 + 2r_2); C_1 + k + cr_2 + hr_2\} = \min\{4\,175,\ 5\,025\} = 4\,175 \text{ lei.}$$

În continuare, pentru $n=3$, vom obține:

$$C_3 = \min\{C_{j-1} + k + c(r_{j+1} + \ldots + r_3) + h[r_j + 2r_{j+1} + \ldots + (4 - j)r_3]\} = \min\{C_0 + k + c(r_1 + r_2 + r_3) + h(r_1 + 2r_2 + 3r_3); C_1 + k + c(r_2 + r_3) + h(r_2 + 2r_3); C_2 + k + cr_3 + hr_3\} = \min\{5\,475;\ 6\,225;\ 6\,275\} = 5\,475 \text{ lei.}$$

În sfîrșit, pentru $n = 4$, formula (9) conduce la:

$$C_4 = \min\{C_{j-1} + k + c(r_j + r_{j+1} + \ldots + r_4) + h(r_j + r_{j+1} + \ldots + (5 - j)r_4\} = \min\{C_0 + k + c(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + h(r_1 + 2r_2 + 3r_3 + r_4); C_1 + k + c(r_2 + r_3 + r_4) + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4); C_2 + k + c(r_3 + r_4) + h(r_3 + 2r_4); C_3 + k + cr_4 + hr_4\} = \min\{7\,225;\ 7\,850;\ 7\,775;\ 7\,850\} = 7\,225 \text{ lei.}$$

Deoarece valoarea minimă C_4 este atinsă pentru primul termen, corespunzător lui C_0, rezultă că ultima dată cînd trebuie să se fabrice produsul coincide cu începutul primei perioade. În consecință, va trebui să se producă o singură dată, la începutul primei luni, o cantitate egală cu:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 100 \text{ unități de produs,}$$

cantitate care trebuie să asigure cererea pe toate cele patru luni.

Problema 7. Cererea unui produs este repartizată pe cele patru trimestre ale unui an astfel:

$r_1 = 50$ unități, $r_2 = 40$ unități,

$r_3 = 30$ unități, $r_4 = 50$ unități.

Știind că pentru lansarea în producție a produsului în timpul unui trimestru sînt necesare cheltuieli de 450 lei, că pentru fabricarea unei unități de produs se cheltuiesc 40 lei și că pentru stocarea fiecărei unități de produs se plătesc 10 lei pe trimestru, să se determine un plan de producție pentru produsul respectiv, astfel încît cheltuielile totale să fie minime. Se presupune capacitatea de producție pe fiecare trimestru nelimitată.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Din enunțul problemei rezultă următoarele date:

$$k = 450 \text{ lei},$$
$$c = 40 \text{ lei/unitate},$$
$$b = 10 \text{ lei/unitate} \cdot \text{trimestru}.$$

Folosind formula (9) pentru $n = 1$ și punînd $C_0 = 0$, obținem:

$$C_1 = C_0 + k + cr_1 + hr_1 = 2\,950 \text{ lei}.$$

Pentru $n = 2$, aceeași formulă conduce la:

$$C_2 = \min \{ C_0 + k + c(r_1 + r_2) + h(r_1 + 2r_2);\ C_1 + k + cr_2 + hr_2 \} = \min \{ 5\,350;\ 5\,400 \} = 5\,350 \text{ lei}.$$

Înlocuind $n = 3$, vom avea:

$$C_3 = \min \{ C_0 + k + c(r_1 + r_2 + r_3) + h(r_1 + 2r_2 + 3r_3);\ C_1 + k + c(r_2 + r_3) + h(r_2 + 2r_3);\ C_2 + k + cr_3 + hr_3 \} = \min \{ 7\,450;\ 7\,200;\ 7\,300 \} = 7\,200 \text{ lei}.$$

În sfîrșit, pentru $n = 4$, obținem:

$$C_4 = \min \{ C_0 + k + c(r_1 + r_2 + r_4) + b(r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4);\ C_1 + k + c(r_2 + r_3 + r_4) + h(r_2 + 2r_3 + 3r_4);\ C_2 + k + c(r_3 + r_4) + b(r_3 + 2r_4);\ C_3 + k + cr_4 + br_4 \} = \min \{ 11\,450;\ 10\,700;\ 10\,300;\ 10\,150 \} = 10\,150 \text{ lei}.$$

Cheltuielile totale minime sînt de 10 150 lei. Pentru a determina în ce trimestre ale anului trebuie să se producă și cît anume, observăm mai întîi că valoarea lui C_4 este atinsă pentru cel de al patrulea termen, corespunzător lui C_3, ceea ce rezultă că ultima dată trebuie să se producă la începutul trimestrului al patrulea o cantitate de 50 unități, care să asigure cererea pe acest trimestru. Trecînd la relația ce a condus la valoarea lui C_3, observăm că această valoare a fost atinsă pentru cel de al doilea termen, corespunzător lui C_1, ceea ce rezultă că producția anterioară trebuie realizată la începutul trimestrului al doilea în cantitate de: $r_2 + r_3 = 70$ unități, pentru a acoperi cererile trimestrelor doi și trei. În sfîrșit, trecînd la soluția ce a condus la valoarea C_1, este evident că prima dată trebuie să se producă 50 unități la începutul primului trimestru, pentru a asigura cererea pe acest trimestru.

În consecință, planul de producție trebuie să ceară să producem:

— 50 unități la începutul trimestrului întîi;
— 70 unități la începutul trimestrului al doilea;
— 50 unități la începutul trimestrului al patrulea.

În acest fel, cheltuielile totale vor fi minime și egale cu 10 150 lei.

Grafic, acest plan de producție conduce la variația stocului în timp, reprezentată în figura III.1.

Scanned with OKEN Scanner

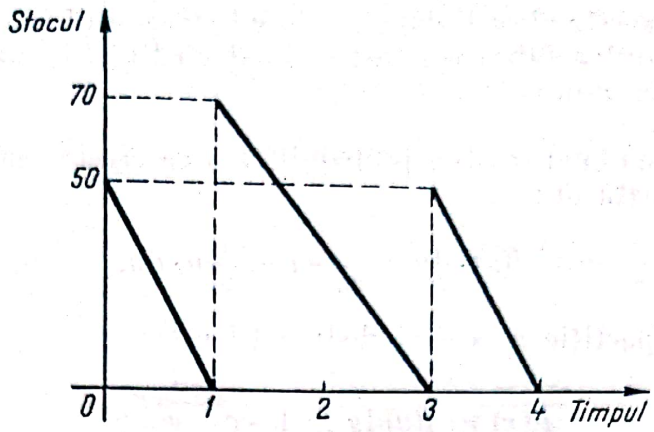


Fig. III.1

Problema 8. Fie un produs, a cărui cerere în timpul unei perioade este reprezentată prin următoarea densitate de probabilităţi:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{50}, \text{ pentru } 0 \leqslant y \leqslant 10, \\ 0, \text{ pentru toate celelalte valori.} \end{cases}$$

Fabricarea unei unităţi de produs cere cheltuieli de 6 unităţi băneşti, alte cheltuieli nemaiexistînd, iar preţul de vînzare este de 9 u.b.

Să se determine cîte unităţi de produs trebuie fabricate la începutul perioadei, dacă nu există un stoc iniţial înaintea acestei fabricări, astfel încît cheltuielile totale să fie minime.

Rezolvare. Calculăm mai întîi funcţia de repartiţie a cererii, care va avea forma următoare:

$$F(y) = \int_0^y \frac{y}{50}\,dy = \frac{y^2}{100}, \text{ pentru } y \leqslant 10,$$

precum şi:

$$F(y) = 1, \text{ pentru } y > 10.$$

Ecuaţia (10) devine în acest caz:

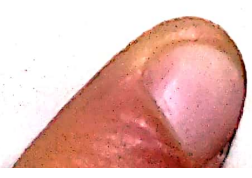
$$\frac{x^2}{100} = \frac{9-6}{9},$$

de unde:

$$x \approx 5{,}8.$$

Politica opţională cere deci să se producă la începutul perioadei 5,8 unităţi din produsul respectiv.

Problema 9. Fie un tip de piese, a căror cerere pe o perioadă de un an are o distribuţie exponenţială, cu media de 40 unităţi. Cheltuielile de producţie a unei singure piese sînt de 2 500 lei, iar cheltuielile de stocare, la sfîrşitul anului sînt de 500 lei pe piesă. Preţul de vînzare al pieselor este de 4 000 lei pe bucată.



Scanned with OKEN Scanner

Să se determine cîte piese trebuie produse la începutul anului, dacă nu există un stoc inițial înaintea fabricării, astfel încît cheltuielile totale, de producție și de stocare, să fie minime.

Rezolvare. După cum se știe, probabilitatea ca cererea să fie cuprinsă între y și $y + dy$ este dată de:

$$f(y) \cdot dy = \frac{1}{40} \cdot l - \frac{1}{40} y \cdot dy.$$

Funcția de repartiție a acestei distribuții este:

$$F(x) = f(y)dy = 1 - e^{-\frac{1}{40}x}.$$

Ecuația (12) devine:

$$1 - e^{-\frac{1}{40}x} = \frac{4\,000 - 2\,500}{4\,000 + 500},$$

de unde scoatem că:

$$e^{-\frac{1}{40}x} = \frac{2}{3}$$

sau:

$$x = 40 \ln \frac{3}{2} \approx 16{,}2.$$

Politica opțională cere deci producerea, la începutul anului, a numai 16 piese de tipul considerat.

Problema 10. Considerînd datele din problema 9, să se determine politica opțională, dacă înaintea producerii există un stoc inițial de 10 piese.

Rezolvare. Deoarece stocul optim, determinat în calculele de la problema 9, a fost egal cu:

$$x = s = 16,$$

iar $x_0 = 10$, rezultă că va trebui să producem la începutul perioadei un număr de:

$$s - x_0 = 16 - 10 = 6 \text{ piese.}$$

Problema 11. Cererea unui produs, în decursul unui trimestru, are o distribuție a cărei densitate de probabilitate este următoarea

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{450}(30 - y), \text{ pentru } y \in [0; 30], \\ 0, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Costul de producție este de 500 lei pentru fiecare unitate de produs, iar costul de stocare este de 200 lei pe unitatea de produs în decursul întregului trimestru.

Scanned with OKEN Scanner

Știind că prețul de vînzare este de 2 500 lei și că inițial existau 10 unități în stoc, să se determine cantitatea ce trebuie produsă, astfel încît cheltuielile totale, de producție și de stocare, să fie minime.

Rezolvare. Funcția de repartiție a cererii se calculează în modul următor, pentru intervalul [0; 30]:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{450}(30 - y)dy = \frac{1}{450}\left(30\ x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Ecuația (12) se scrie deci sub forma:

$$\frac{1}{450}\left(30\ x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{2\,500 - 500}{2\,500 + 200},$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$3x^2 - 180x + 2\,000 = 0.$$

Rezolvînd această ecuație, obținem rădăcinile ce urmează:

$$x_1 \approx 45{,}3, \qquad x_2 \approx 14{,}7,$$

dintre care o vom păstra evident pe cea de a doua (este în intervalul cu care lucrăm). Avem deci:

$$s = 14{,}7.$$

Deoarece avem situația: $x_0 < s$, va trebui să se producă la începutul trimestrului o cantitate de produs egală cu:

$$s - x_0 = 14{,}7 - 10 = 4{,}7 \text{ unități.}$$

Problema 12. O întreprindere de aparate electronice de măsură și control stochează produsele finite într-un depozit.

La sfîrșitul unei perioade (o lună) întreprinderea are în depozit un stoc de 15 buc. voltmetre electronice.

Costul de producție al unui voltmetru electronic este de 1000 lei/buc., prețul de vînzare este de 1300 lei/buc., iar costul de stocare pentru un aparat este de 200 lei/lună, plătindu-se la sfîrșitul lunii pentru aparatele rămase nevîndute.

Cîte aparate trebuie să producă întreprinderea în luna respectivă astfel încît cheltuielile medii de producție și stocare să fie minime, știind că cererea pentru aceste aparate are o distribuție normală, cu media $m = 30$ aparate și dispersia $\sigma^2 = 5{,}76$ aparate^2.

Rezolvare. Avem următoarele date:

$x_0 = 15$ buc., $\qquad c = 1\,000$ lei/buc.,

$p = 1\,300$ lei/buc., $\qquad h = 200$ lei/buc-lună.

Folosind formula (12), sîntem conduși la rezolvarea următoarei ecuații:

$$F(x) = \frac{1\,300 - 1\,000}{1\,300 + 200}, \quad x \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că funcția de repartiție a distribuției normale are următoarea formă:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

unde $\Phi(z)$ este funcția lui Laplace, care este tabelată. În cazul nostru, ecuația de mai sus devine:

$$\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{4}{5}$$

sau:

$$\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = 0{,}3.$$

Tabela lui Laplace conduce la următoarea valoare a argumentului corespunzător lui 0,3:

$$\Phi^{-1}(0{,}3) \approx 0{,}84.$$

Vom avea deci de rezolvat ecuația:

$$\frac{x-m}{\sigma} = 0{,}84,$$

în care $m = 30$, iar $\sigma = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$, deci:

$$\frac{x-30}{2{,}4} = 0{,}84,$$

de unde:

$$x = s = 30 + 2{,}4 \cdot 0{,}84 \approx 32 \text{ aparate.}$$

Va trebui să completăm stocul de la începutul lunii la $s = 32$ aparate, fapt pentru care mai trebuie produse:

$$s - x_0 = 32 - 15 = 17 \text{ aparate.}$$

Problema 13. Fie un tip de produs, a cărui cerere în timpul unui an are o distribuție exponențială cu media de 80 unități. Cheltuielile de producție sînt egale cu 600 lei pe unitate, cheltuielile de stocare de 50 lei pe unitate, iar prețul de vînzare este de 1 000 lei pe unitate. Să se determine cîte unități de produs să se fabrice la începutul anului dacă înaintea fabricării există în stoc 20 unități, iar pregătirea producției cere o cheltuială suplimentară de 1 000 lei.

Rezolvare. Deoarece avem:

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{80}},$$

pentru a determina cantitatea s, trebuie să rezolvăm următoarea ecuație:

$$1 - e^{\frac{-x}{80}} = \frac{1\,000 - 600}{1\,000 + 50},$$

sau:

$$e^{-\frac{x}{80}} = \frac{13}{21}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici obținem rădăcina:

$$x = s = 38{,}37.$$

Pentru determinarea lui s', calculăm mai întîi funcția $q(x)$, după cum urmează:

$$q(x) = cx + L(x) = cx + p\int_x^{\infty}(y-x)\,f(y)\,dy + k\int_0^x (x-y)\,f(y)\,dy = 600 +$$

$$+ 1\,000\int_x^{\infty}(y-x)\cdot\frac{1}{80}e^{-\frac{y}{80}}dy + 50\int_0^x (x-y)\cdot\frac{1}{80}e^{-\frac{y}{80}}dy = 650\,x - 40\,000 +$$

$$+ 84\,000\,e^{-\frac{x}{80}}.$$

Cu ajutorul acestei funcții, se scrie ecuația (15), care are forma următoare:

$$650x - 4\,000 + 84\,000\,e^{-\frac{x}{80}} = 1\,000 + 24\,940 - 4\,000 + 52\,000,$$

sau:

$$8\,400\cdot e^{-\frac{x}{80}} + 65x - 7\,794 = 0.$$

Rezolvînd în mod aproximativ această ecuație transcendentă, se obține rădăcina cea mai mică de forma:

$$x = s' = 23{,}15.$$

Deoarece avem situația:

$$x_0 < s',$$

politica optimală cere să producem, la începutul perioadei, pînă la cantitatea $s = 38{,}37$, adică o cantitate de produs, egală cu:

$$s - x_0 = 38{,}37 - 20 = 18{,}37 \text{ unități.}$$

Problema 14. Să se găsească o formulă aproximativă pentru calculul lui s', din modelul cu cheltuieli de producție, de stocare și de lansare, în cazul în care distribuția cererii este exponențială, iar cheltuielile de lansare nu sînt prea mari în raport cu celelalte tipuri de cheltuieli.

Rezolvare. Să presupunem că densitatea de probabilitate a cererii este de forma următoare:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\frac{y}{\lambda}}, y \geqslant 0,$$

unde, după cum se știe, λ este valoarea medie a distribuției. Se știe, de asemenea, că funcția de repartiție a acestei distribuții are forma următoare:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}},\ x \in R.$$

Ecuația (12), a cărei rădăcină este valoarea $x = s$, se scrie sub forma:

$$1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{p-c}{p+h}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd-o, obținem:

$$x = s = \lambda \ln \frac{p+h}{c+h}. \tag{20}$$

Calculul funcției $q(x)$, cu ajutorul aplicării relațiilor (13) și (14), conduce succesiv la următoarele rezultate:

$$q(x) = p\int_x^{\infty}(y-x)\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}\cdot dy + h\cdot\int_0^x(x-y)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}dy + cx = \lambda\cdot(p+h)\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} + (c+h)x - h\cdot\lambda.$$

Ecuația (15), scrisă cu ajutorul funcției $q(x)$, determinate mai sus, se scrie astfel:

$$\lambda(p+h)e^{-\frac{s'}{\lambda}} + (c+h)s' - h\lambda = h + \lambda(p+h)e^{-\frac{s}{\lambda}} + (c+h)s - h\lambda,$$

sau, după o transformare simplă, sub forma ce urmează:

$$\lambda(p+h)e^{\frac{s-s'}{\lambda}}e^{\frac{s}{\lambda}} = \lambda(p+h)e^{-\frac{s}{\lambda}} + (c+h)(s-s') + k.$$

Să observăm însă că, datorită valorii lui s, determinată mai sus și exprimată prin (20), putem scrie:

$$e^{\frac{s}{\lambda}} = e^{\ln\frac{p+h}{c+h}} = \frac{p+h}{c+h},$$

ceea ce înseamnă că ecuația ce dă pe s' capătă următoarea formă:

$$\lambda(c+h)e^{\frac{s-s'}{\lambda}} = \lambda(c+h) + (c+h)(s-s') + k.$$

Notînd:

$$s - s' = \Delta,$$

această ecuație devine o ecuație cu necunoscuta s, de forma:

$$\lambda(c+h)e^{\frac{\Delta}{\lambda}} = \lambda(c+h) + \Delta(c+h) + k,$$

sau:

$$e^{\frac{\Delta}{\lambda}} = 1 + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{k}{\lambda(c+h)}.$$

În condițiile în care diferența Δ nu este prea mare în raport cu λ, astfel încît raportul $\frac{\Delta}{\lambda}$ este apropiat de zero, ceea ce se întîmplă desigur atunci cînd cheltuielile de lansare nu sînt prea mari în raport cu celelalte cheltuieli,

Scanned with OKEN Scanner

putem aproxima pe $e^{\frac{\Delta}{\lambda}}$ suficient de bine, dezvoltîndu-l în serie Mac-Laurin și neglijînd toate puterile lui $\frac{\Delta}{\lambda}$ cu exponent mai mare ca doi:

$$e^{\frac{\Delta}{\lambda}} \approx 1 + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{\Delta^2}{2\lambda^2}.$$

În acest fel, ecuația în Δ, obținută mai sus, devine:

$$1 + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{\Delta^2}{2\lambda^2} \approx 1 + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{k}{\lambda(c+h)},$$

de unde:

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{2\lambda \cdot k}{c+h}}. \tag{21}$$

Această formulă furnizează ușor o valoare aproximativă pentru s', prin intermediul lui Δ.

Problema 15. Considerînd datele din problema 13, să se determine valoarea lui s', folosind formula aproximativă obținută la problema 14.

Rezolvare. Formula (21) conduce la valoarea:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 1\,000}{600 + 50}} \approx 15{,}6,$$

de unde:

$$s' = s - \Delta \approx 38{,}37 - 15{,}6 = 22{,}77.$$

Aceasta este o valoare apropiată de cea obținută prin calcul direct, în problema 13.

Problema 16. Trebuie planificată fabricarea unui produs pe timp de două perioade. Cererea acestui produs, în timpul unei perioade, este o variabilă aleatoare, a cărei densitate de probabilitate este următoarea:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & \text{pentru } 0 \leqslant y \leqslant 100, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Se știe că cererile, pe cele două perioade, sînt variabile aleatoare independente, cu aceeași distribuție. Cheltuielile de producție sînt egale cu 200 lei pe unitatea de produs, iar cheltuielile de stocare de 50 lei pe unitatea de produs ce nu este vîndută în timpul perioadei în care este păstrată. Prețul de vînzare este de 350 lei pe unitatea de produs.

Știind că inițial există un stoc de 20 unități, să se determine o politică optimală pe două perioade.

Rezolvare. Funcția de repartiție a distribuției cererii este următoarea:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0, \\ \frac{x}{100}, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 100, \\ 1, & \text{pentru } x > 100. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd evident valori din intervalul [0; 100], ecuaţia (12'') se scrie sub forma următoare:

$$\frac{x_1}{100} = \frac{350 - 200}{350 + 50},$$

de unde:

$$x_1 = s_1 = 37{,}5.$$

Cu ajutorul relaţiei (13), calculăm pe $L(z)$ sub forma:

$$L(z) = p \int_z^{\infty} (y - x)\, f(y)\, dy + h \int_0^z (z - y)\, f(y)\, dy =$$

$$= 250 \int_z^{100} (y - z)\, \frac{1}{100}\, dy + 50 \int_0^z (z - y)\, \frac{1}{100}\, dy = 17\,500 - 350\, z + 2z^2.$$

Aplicarea relaţiei (17) conduce la următoarele calcule:

$$\alpha(x_2) = \int_0^{x_2 - 37{,}5} [17\,500 - 350\,(x_2 - y) + 2(x_2 - y)^2]\, \frac{1}{100}\, dy +$$

$$+ \int_{x_2 - 37{,}5}^{100} [200\,(37{,}5 - x_2 + y) + 17\,500 - 350 \cdot 37{,}5 + 2 \cdot 37{,}5^2]\, \frac{1}{100}\, dy =$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{2}{3} x_2^3 - 75\, x_2^2 - 17\,187{,}5\, x_2 + 1\,103\,916{,}25 \right).$$

Folosind relaţia (18), calculăm pe $\alpha(x_2)$ sub forma:

$$\alpha(x_2) = 200\,(x_2 - 20) + 17\,500 - 350\, x_2 + 2\, x_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{100} \left(\frac{2}{3} x_2^3 - 75\, x_2^2 - 17\,187{,}5\, x_2 + 1\,103\,916{,}25 \right).$$

Pentru a determina punctul de minim al acestei funcţii, anulăm derivata sa de ordinul întîi:

$$200 - 350 + 4\, x_2 + \frac{1}{100} (2\, x_2^2 - 150\, x_2 - 17\,187{,}5) = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie şi păstrînd numai rădăcina nenegativă, obţinem:

$$x_2 = s_2 = 78{,}92.$$

În concluzie, deoarece avem $x_2^0 < s_2$, la începutul primei perioade trebuie să producem:

$$s_2 - x_2^0 = 78{,}92 - 20 = 58{,}92 \text{ unităţi},$$

rămînînd ca, la începutul perioadei ce urmează, să completăm stocul rămas pînă la valoarea:

$$s_1 = 37{,}5 \text{ unităţi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 17. Cheltuielile unitare de fabricaţie a unui produs sînt egale cu 500 lei, iar preţul de vînzare cu 800 lei. Cheltuielile de stocare a unei unităţi pe o perioadă sînt de 50 lei. Pregătirea producţiei cere cheltuieli suplimentare în valoare de 500 lei.

Cererea produsului respectiv este aleatoare. Pentru a cerceta natura distribuţiei sale, s-a făcut o cercetare statistică asupra a 450 situaţii anterioare, obţinîndu-se valori ale cererii y, conform tabelului III.4, în care fiecărei valori y

Tabelul III.4

y	Ny
40	215
41	150
42	80
43	4
44	1
—	450

îi corespunde numărul Ny, care arată de cîte ori a fost întîlnită această valoare în cele 450 cazuri cercetate.

Ştiind că iniţial există un stoc de zece unităţi, să se arate ce decizie trebuie luată cu privire la fabricarea produsului, astfel încît cheltuielile medii totale să fie minime.

Rezolvare. Descreşterea rapidă a cantităţilor Ny, în tabelul III.4, ne sugerează o distribuţie exponenţială pentru variabila y. O astfel de distribuţie ar avea următoarea densitate de probabilitate:

$$f(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x \geqslant 0,$$

în care λ reprezintă chiar valoarea medie a variabilei.

Estimăm mai întîi pe λ cu ajutorul mediei de selecţie, ceea ce conduce la valoarea:

$$\lambda = \frac{\Sigma y \cdot N_y}{\Sigma N_y} = \frac{18\,326}{450} \approx 40{,}72$$

(sumele necesare sînt calculate pe coloanele a doua şi a treia din tabelul III.5).

În tabelul III.5 sînt realizate calculele necesare aplicării testului lui Kolmogorov pentru verificarea ipotezei că distribuţia cererii este exponenţială. Astfel, coloana $F_n(y)$ a acestui tabel reprezintă funcţia de repartiţie empirică, obţinută cumulînd, în dreptul fiecărei linii, frecvenţa absolută din linia respectivă cu toate frecvenţele absolute de deasupra ei şi împărţind la 450. De exemplu, valoarea $F_n(y)$ de pe linia a treia a fost calculată astfel:

$$F_3(y) = \frac{80 + 150 + 215}{450} \approx 0{,}83.$$

Tabelul III.5

y	N_y	$y \cdot N_y$	$F_n(y)$	$F(y)$	$F_n(y) - F(y)$
40	215	8 600	0,48	0,63	0,15
41	150	6 150	0,81	0,64	0,17
42	80	3 360	0,83	0,64	0,19
43	4	172	0,98	0,65	0,33
44	1	44	1,00	0,66	0,34
Total	450	18 326	—	—	—

Coloana a cincea a tabelului conține frecvențele teoretice, calculate cu formula cunoscută:

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\lambda}},$$

în care considerăm: $\lambda = 40{,}72$. Calculele au fost făcute folosind tabela cu puterile numărului e și sînt cuprinse în tabelul ajutător III.6. În sfîrșit, coloana a șasea a tabelului III.5 conține modulele diferențelor dintre cele două frecvențe dintre care s-a încadrat cea mai mare valoare.

Tabelul III.6

y	$\frac{1}{\lambda} y$	$e^{\frac{1}{\lambda} y}$	$e^{-\frac{1}{\lambda} y}$	$F(y)$
40	0,982	2,668	0,375	0,625
41	1,007	2,738	0,365	0,635
42	1,031	2,804	0,357	0,643
43	1,056	2,874	0,348	0,652
44	1,081	2,948	0,340	0,660

Considerînd drept nivel de semnificație pe $\varepsilon = 0{,}01$, tabelul corespunzător testului lui Kolmogorov ne conduce la valoarea:

$$\lambda_0 = 1{,}63.$$

Deoarece calculele au folosit $n = 5$ valori pentru y, calculăm expresia:

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}63}{\sqrt{5}} \approx 0{,}73.$$

Deoarece am obținut:

$$\max. \left| F_n(y) - F(y) \right| < \frac{\lambda_0}{n},$$

acceptăm ipoteza că cererea produsului are o distribuție exponențială, media ei fiind: $\lambda = 40{,}72$.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind relația (20), obținem:

$$s = \lambda \cdot \ln \frac{p+h}{c+h} \approx 17{,}7.$$

Pe de altă parte, folosind formula aproximativă (21), obținem:

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{2\lambda k}{c+h}} \approx 8{,}6.$$

Deci:

$$s' = s - \Delta \approx 17{,}7 - 8{,}6 = 9{,}1.$$

Deoarece avem $x_0 = 10$, sîntem în situația:

$$x_0 \geqslant s',$$

deci politica optimă ce trebuie urmată este să nu se producă nimic în perioada cercetată.

§ 3. PROBLEME PROPUSE

1. Necesarul zilnic de prefabricate din beton pentru un șantier este de 75 t. Se consideră că în timpul anului cererea este aproximativ constantă pe intervale egale.

Cheltuielile de stocare sînt de 0,16 lei pe tonă și pe zi.

Cheltuielile de lansare sînt de 1 200 lei pentru o comandă.

Costul ruperii stocului este de 0,20 lei pe tonă și pe zi.

Să se determine strategia optimă.

Soluție:

$$Q^* = 1\,350 \text{ t}; \quad S^* = 500 \text{ t}; \quad T^* = 18 \text{ zile}.$$

2. O fabrică de prefabricate consumă anual 350 tone ciment. Procesul tehnologic este pe bandă cu o producție constantă de prefabricate. Costul de lansare în producție este de 2 000 lei, iar costul de stocare este de 2 500 lei pe tonă, în timp de un an.

Să se determine cantitatea optimă de aprovizionat și perioada corespunzătoare.

Soluție: $Q^* = 24$ t; $T^* = 24$ zile.

3. O fabrică de ciment consumă trimestrial o cantitate de 154 tone de calcar, cu care se aprovizionează de la o carieră din apropiere. Costul de pregătire a producției fabricii de ciment este de 1400 lei pe trimestru, iar costul de stocare de 900 lei pe tonă și pe trimestru.

Se cere să se determine:

— cantitatea optimă de aprovizionat,

— perioada optimă de aprovizionare.

Soluție: $Q^* = 22{,}13$ t; $T^* = 0{,}143$ trimestre.

Scanned with OKEN Scanner

4. O fabrică de pîine folosește într-o lună 900 000 kg făină albă. La fiecare comandă de aprovizionare se cheltuiesc cu lansarea comenzii și recepționarea ei cîte 6 000 lei. Depozitarea făinii recepționate costă 1 leu pe zi sacul (un sac avînd 50 kg). Să se determine lotul economic și perioada optimă pentru aprovizionarea cu făină.

Soluție: $Q^* = 134\,500$ kg; $T^* = 4{,}4$ zile.

5. O întreprindere are nevoie de cîte 25 semifabricate pe lună, pentru prelucrarea mecanică. Costul lansării unei comenzi este de 15 unități bănești, iar costul păstrării este de 0,30 unități bănești pe lună și pe unitate.

a) Care este politica optimă de aprovizionare?

b) Dacă e admisă lipsa de stoc se percepe o penalizare de 1,5 unități bănești pentru o bucată și o lună. Care este perioada optimă de aprovizionare?

Soluție: a) $Q^* = 50$ unități; $T^* = 2$ luni.

b) $T^* = 2{,}4$ luni.

6. Depozitul de stofă din lînă pură a unei fabrici de confecții este aprovizionat de un furnizor astfel încît cheltuielile de aprovizionare sînt de 12 000 lei la un transport. În sezonul de vară (trei luni) fabrica consumă în mod constant 1 000 m stofă pe zi. Stocarea unui metru de stofă revine la 0,50 lei pe zi, iar pierderile datorate lipsei unui metru de stofă pe o zi sînt de 200 lei.

Să se determine politica optimă de gospodărire a stocului pe întregul sezon.

Soluție: $Q^* = 6\,919{,}6$ m; $S^* = 6\,920$ m; $T^* = 7$ zile.

7. O fabrică de aparate electronice de măsură primește o comandă de 200 radiotelefoane pe care trebuie să le furnizeze în decurs de un an. Ea își propune să producă aceste aparate în serii egale, în perioade de timp egale.

Cheltuielile ocazionate de expedierea unui lot de radiotelefoane sînt de 2 600 lei, iar cele legate de stocarea unui radiotelefon în magazia de produse finite este de 36 lei/an. De asemeni se știe că cheltuielile de producție pe unitatea de produs sînt egale cu 3 000 lei. Presupunînd că lipsa de stoc nu este permisă, să se calculeze:

— volumul optim al unei serii, care să satisfacă cererea de radiotelefoane;

— perioada optimă în care se realizează volumul optim al unei serii;

— costul total minim, legat de producerea celor 200 radiotelefoane și de stocarea lor în magazia de produse finite, pînă la livrare.

Soluție: $Q^* = 200$ radiotelefoane, $T^* = 1$ an, $C^* = 607\,200$ lei.

8. Depozitul de tutunuri brute din cadrul unei întreprinderi de țigarete trebuie să se aprovizioneze lunar cu tutunuri fermentate, necesare introducerii în procesul de fabricație a țigaretelor. Se cere să se stabilească programul optim de aprovizionare știind că aprovizionarea este făcută la intervale egale de timp,

Scanned with OKEN Scanner

cu perioade egale. Pe baza datelor de la contabilitatea întreprinderii, rezultă următoarele cheltuieli lunare în legătură cu stocarea tutunurilor:

— cheltuieli cu lumina	480 lei
— cheltuieli cu apa	90 lei
— amortizarea clădirii	459 lei
— salariul magazionerului	1 175 lei
— salariul gestionarului	1 520 lei
— salariul celor cinci muncitori necalificaţi	5 336 lei
— amortizarea electrostivuitorilor	3 100 lei
TOTAL	12 160 lei

Din suprafaţa depozitului, se folosesc 30% pentru stocarea tutunurilor fermentate din soiul Ghimpaţi. Cantitatea medie lunară cu care se aprovizionează depczitul este de 38 tone tutun fermentat Ghimpaţi. Se cunoaşte că cheltuielile făcute de la darea unei comenzi pînă în momentul intrării şi recepţionării tutunurilor în depozit sînt:

— salariul calculatorului principal din cadrul depozitului	1 250 lei
— salariul unui merceolog	1 952 lei
— salariul unei dactilografe	1 194 lei
— imprimate, hîrtie, timbre	55 lei
— telefoane pentru darea şi executarea comenzii	135 lei
— alte cheltuieli pentru depozit	245 lei

Timpul afectat de fiecare lucrător al depozitului, pentru o comandă, este:

— calculatorul	24 ore
— merceologul	10 ore
— dactilografa	8 ore

Soluţie: $h = 2{,}77$ lei/t.zi, $k = 719$ lei, $a = 1{,}46$ t.

$Q^* = 27{,}55$ t, $T^* \approx 19$ zile.

9. Secţia de agregate a unei fabrici de maşini-unelte şi agregate foloseşte lunar, pentru realizarea planului de producţie, o cantitate de 9 000 kg de laminate.

Pentru fiecare comandă de laminate se cheltuiesc 500 lei de la darea comenzii şi pînă la recepţionare.

Odată recepţionate laminatele, ele sînt depozitate în magazia unităţii unde se plătesc cheltuieli de stocaj de 0,10 lei/kg pe fiecare zi.

Costul unui kilogram de laminat este de 40 lei. Aprovizionarea secţiei se face la intervale de timp egale cu cantităţi egale.

Să se determine cantitatea de laminate cu care trebuie să se aprovizioneze magazia secţiei astfel încît procesul de producţie să nu fie întrerupt din cauza lipsei de materiale, iar cheltuielile să fie minime.

Soluţie: $Q^* = 1\,732$ kg; $T^* = 6{,}7$ zile, $C^* = 2\,732$ lei.

Scanned with OKEN Scanner

10. La începutul unui an o fabrică de confecții a încheiat contracte cu beneficiarii în vederea livrării pe anul în curs a 1 000 000 buc. confecții femei, de un anumit model. Cheltuielile de lansare în producție a unui lot de confecții sînt de 80 000 lei. Fabrica asigură păstrarea produselor la magazie, la un preț de stocaj de 0,10 lei/bucată și pe zi, livrarea făcîndu-se în mod continuu.

Pentru situația în care fabrica nu va putea asigura cantitatea contractată și la termenele stabilite, va fi penalizată pentru fiecare zi întîrziere cu 0,25 lei/bucată.

Știind că prețul de producție pe bucata de confecții este de 100 lei, să se stabilească planul optim de producție al fabricii, numărul loturilor de producție și mărimea fiecărui lot, în condițiile unor cheltuieli minime de producție și stocaj.

Soluție: $Q^* = 256\,410$ buc., $T^* = 61$ zile.

11. O întreprindere de reparații auto realizează producția trimestrială, folosind 10 000 repere piese de schimb. Pentru fiecare comandă de piese de schimb se cheltuiesc 500 lei de la darea comenzii pînă la recepționarea pieselor. După recepționare, piesele de schimb sînt depozitate în magazie, pînă la intrarea lor în producție. Costul stocării este de 2 lei pentru 50 de piese depozitate, pe zi.

Costul de achiziționare al unei piese este de 30 lei, iar aprovizionarea întreprinderii se face la intervale de timp egale, cu cantități egale.

Să se determine cantitatea de piese cu care se reaprovizionează întreprinderea, astfel încît procesul de producție să nu fie întrerupt din cauza lipsei de piese de schimb, iar cheltuielile cu achiziționarea și depozitarea pieselor să fie minime, de asemeni intervalul optim de timp dintre două reaprovizionări.

Soluție: $T^* = 15$ zile, $Q^* = 1\,667$ piese.

12. O unitate economică are un singur nomenclator de produse privind fabricarea roților dințate conice. Acest produs este necesar unei alte unități economice, din cadrul industriei constructoare de mașini, cererea pentru acest produs fiind de 2 900 buc., repartizată pe un semestru cu perioade de livrare de circa 36 zile. Cererea variază de la o perioadă la alta conform tabelului III.7.

Tabelul III.7

Perioada	1	2	3	4	5
Cererea	830	520	750	350	450

Pentru lansarea producției, unitatea economică face cheltuieli în valoare de 218 u.b., costul unitar pe produs fiind de 16 u.b.

Introducînd tehnica containizării, în cadrul stocării produselor, s-a ajuns la o scădere a costului stocajului de la 7 u.b. pe pachetul de roți dințate (pachetul conține 10 bucăți roți dințate), la 6 u.b.

Scanned with OKEN Scanner

Să se alcătuiască planul de producţie al întreprinderii pe întregul semestru, astfel încît costul total de producţie şi stocaj să fie minim.

Soluţie: Se va produce pe fiecare perioadă cantitatea necesară acelei perioade, cu excepţia ultimelor două perioade pentru care tot necesarul se produce la începutul perioadei a patra. Se obţin astfel cheltuieli totale minime egale cu $C_5 = 40\,305$ u.b.

13. Necesarul unei uzine de boghiuri pentru locomotive hidraulice de 1250 CP, conform graficului de livrare a acestor locomotive, este pe primul semestru al anului, defalcat pe luni, cel din tabelul III.8.

Tabelul III.8

	Semestrul I						Total
	I	II	III	IV	V	VI	
Boghiuri	30	25	40	45	35	25	200

Cunoscînd din evidenţa statistică cheltuielile după cum urmează:

c = cost unitar de producţie . . . . . 100 lei,
h = cost unitar de stocaj . . . . . 10 lei,
k = cheltuieli de lansare în producţie . . . . . 500 lei,

uzina este pusă în situaţia de a lua decizia optimă asupra cantităţilor ce urmează să fie fabricate şi asupra momentelor în care se va realiza această producţie. Cum trebuie să procedeze uzina?

Soluţie. Pe primele trei perioade se realizează producţia separat, producînd la începutul fiecărei perioade cantitatea necesară acelei perioade. Pentru ultimele trei perioade se produce o singură dată, la începutul perioadei a patra.

14. O întreprindere de materiale de construcţii şi instalaţii, în perioada de contractare pentru anul viitor, a primit de la întreprinderile consumatoare comenzi pentru cantitatea de 2 800 m.c. P.F.L. dur, cu următoarea eşalonare lunară:

— ianuarie	190 m.c.	— iulie	225 m.c.
— februarie	200 m.c.	— august	295 m.c.
— martie	170 m.c.	— septembrie	300 m.c.
— aprilie	250 m.c.	— octombrie	205 m.c.
— mai	270 m.c.	— noiembrie	210 m.c.
— iunie	260 m.c.	— decembrie	225 m.c.

Se cunosc următoarele cheltuieli legate de modul de organizare a producţiei întreprinderii:

— cheltuieli de lansare $k = 815$ lei,
— costul unui m.c. P.F.L. $c = 1\,195$ lei,
— cheltuieli de stocare $h = 2$ lei /m.c. lună.

Să se determine planul optim de producţie a produsului specificat, astfel încît cheltuielile totale, de producere şi stocare, să fie minime.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Întreprinderea trebuie să producă astfel:
— la începutul lunii ianuarie, 190 m.c. pentru luna în cauză,
— la începutul lunii februarie, 890 m.c. pentru luna februarie și următoarele trei luni,
— la începutul lunii iunie, 485 m.c. pentru lunile iunie și iulie,
— la începutul lunii august, 295 m.c. pentru luna în cauză,
— la începutul lunii septembrie, 505 m.c. pentru lunile septembrie și octombrie,
— la începutul lunii noiembrie, 435 m.c. pentru ultimele două luni ale anului.
Se obțin astfel cheltuieli anuale minime, de: $C_{12} = 3\,358\,590$ lei.

15. Un depozit de produse petroliere aprovizionează cu benzină stațiile PECO ale unui oraș, precum și întreprinderile orașului, la perioade egale, de cinci zile fiecare. Cererile de benzină pentru cele șase perioade ale unei luni, sînt date în tabelul III.9.

Tabelul III.9

Perioada	1	2	3	4	5	6
Cererea	9 800	7 800	11 500	9 900	8 400	6 600

Depozitul se aprovizionează cu benzină prin intermediul vagoanelor cisternă, expediate de la o rafinărie în urma comenzilor de aprovizionare transmise întreprinderii de condiționare și livrare a produselor petroliere Ploiești.

Cheltuiala necesară pentru lansarea comenzii este de 300 lei. Costul unitar de transport este de 100 lei/tonă, iar costul unitar de stocare a unei tone este de 25 lei pe fiecare perioadă.

Să se determine politica optimală de aprovizionare a depozitului, astfel încît cheltuielile totale, de transport și stocare, să fie minime.

Soluție. Politica optimă este cea de aprovizionare la fiecare zece zile, cu cantitatea cerută pe această perioadă. Se obțin astfel cheltuieli minime, egale cu $C_6 = 8\,257{,}25$ lei.

16. În secția de prelucrări mecanice a unei întreprinderi constructoare de mașini, cererea unui produs are următoarea densitate de probabilitate:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{40}, & \text{pentru } 0 \leqslant y \leqslant 20, \\ 0, & \text{pentru celelalte valori.} \end{cases}$$

Mai sînt cunoscute:
— costul producției, de 8 unități bănești pe unitatea de produs;
— prețul de vînzare, de 10 unități bănești.
Se presupune că nu se plătește stocare.

Să se determine numărul de unități care trebuie fabricate la începutul perioadei (considerînd că nu există stoc inițial) astfel încît cîștigul mediu total, obținut prin vînzarea producției, să fie maxim.

Soluție: Se vor produce 4 unități.

Scanned with OKEN Scanner

17. O cooperativă agricolă produce un anumit produs, pentru care cererea populației este aleatoare. Pentru fiecare unitate de produs, cooperativa consumă 16 unități bănești, iar prețul este de 20 unități bănești. Să se determine numărul de unități ce trebuie fabricate la începutul perioadei, astfel încît cîștigul mediu obținut să fie maxim. Dintr-un studiu anterior s-a dedus că cererea este aleatoare, avînd o densitate de probabilitate de forma:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{300}, & \text{pentru } 0 \leqslant y \leqslant 30, \\ 0, & \text{pentru celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Se mai consideră că nu există stoc inițial și că nu se plătește stocarea.

Soluție: Se vor produce 12,25 unități.

18. Într-o întreprindere se fabrică un anumit tip de produse. Cheltuielile de producție sînt de 2 800 lei pe unitatea de produs, iar prețul de vînzare este egal cu 4 200 lei.

Mai este cunoscut și costul de stocare la sfîrșitul perioadei, de 600 lei pe unitatea de produs. Cererea produsului are o distribuție exponențială, cu media egală cu 30.

Se cere să se determine politica optimă, astfel încît media cîștigului maxim realizată să fie maximă, dacă nu există un stoc inițial.

Soluție: Se vor produce 10,345 unități.

19. Într-o întreprindere industrială se fabrică piese corespunzător profilului acesteia, piese a căror cerere are o distribuție exponențială, cu media de 60 unități.

Cheltuielile unitare de producție sînt de 4 000 lei; cheltuielile unitare de stocaj sînt de 500 lei, iar prețul de vînzare este de 5 500 lei.

Să se determine politica optimală, dacă există un stoc inițial de 10 piese.

Soluție: Se vor fabrica încă 7 piese.

20. O uzină de mașini electrice produce un anumit tip de electromotor. Beneficiarii solicită aceste electromotoare în decursul anului, cererea urmînd o lege exponențială, cu media $m = 90$ unități.

Știind că costul de producție pentru un electromotor este de 5 000 lei, costul de stocare este de 600 lei pe an, plătindu-se la sfîrșitul anului, iar prețul de vînzare este de 7 000 lei, să se arate care este politica optimă de producere a electromotoarelor, stocul inițial fiind de 10 bucăți.

Soluție: Uzina mai trebuie să producă încă 18 electromotoare.

21. Capacitatea medie anuală de utilaj metalurgic a unei uzine este de 3 000 tone, adică o capacitate medie lunară de 250 tone.

O tonă de utilaj metalurgic se livrează beneficiarilor la prețul de 8 000 lei și se produce la un cost mediu de 6 000 lei.

Cheltuielile de stocare aferente utilajului metalurgic se plătesc la începutul unei perioade de un an și sînt de 1500 lei.

Scanned with OKEN Scanner

Cererea medie a beneficiarilor are aproximativ o distribuţie normală cu media $m = 200$ tone, iar abaterea medie pătratică $\sigma = 100$ tone.

Se pune problema calculării lotului optim de fabricaţie a utilajului metalurgic pentru care cheltuielile medii totale sînt minime, ştiind că uzina are iniţial o cantitate de 50 tone.

Soluţie: $s = 197{,}6$ tone, deci uzina mai trebuie să producă 147,6 tone.

BIBLIOGRAFIE

1. ARROW K.J., KARLIN S., SCARF H, „*Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*", Stanford, Calif., Stanford University Press, 1962.
2. CUCHAN J., KOENIGSBERG E. „*Scientific Inventory Management*", Prentince-Hall, Inc. Englewood Cliis, N.J. 1963 (Tradusă în limba rusă, Ed. Nauka-Moscova 1967).
3. KAUFMAN A., „*Metode şi modele ale cercetării operaţionale*", Vol.1, Bucureşti, Ed. Ştiinţifică, 1967.
4. HANSSMANN F., „*Operations Research in Production and Inventory Control*", London, N.Y., Jhon Wiley and Sons Inc., 1965.
5. MORAN P.A.P., „*The Theory of Storage*", London, Tethuen and Co. Ltd. 1959.
6. MORSE P.M., „*Queues, Inventories and Maintenance. The Analysis of Systems with Variable Demand and Supply*", John Wiley and Sons, New-York, 1968.
7. WHITIN T.M., „*Theory of Inventory Management*", 2-nd. Princenton Univ. Press, 1957.
8. VĂDUVA I., DINESCU C. şi SĂVULESCU B., *Modele matematice în organizarea şi conducerea producţiei*", Ed. Didactică şi Pedagogică, 1974 (vol. II, partea 3-a).
9. HADLEY G. and WHITIN T., „*Anallysis of Inventory Systems*," Prentince Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1963.
10. STARR M. and MILLER D., „*Inventory Control: Theory and Practice*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1962.
11. VEINOTT A.F., „*The Statics of Mathematical Inventory Theory*", Management Science, 12 No. 11, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

PROBLEME CARE CERCETEAZĂ AȘTEPTAREA

§ 1. MODELE DE AȘTEPTARE

În activitatea de producție, apar foarte des fenomene de așteptare, generate de sosirile întîmplătoare ale unor unități (oameni, mașini etc.) la una sau mai multe stații (ghișee, mecanici etc.) ce efectuează anumite servicii. Se știe de asemenea că, de cele mai multe ori, timpul de servire a unei unități de către o stație este o variabilă aleatoare. În cele ce urmează nu vom considera decît cazul, foarte des întîlnit în practică, în care sosirile sînt aleatoare, astfel încît numărul de unități sosite în unitatea de timp au distribuții Poisson, iar timpul de servire a unei unități de către o stație este o variabilă aleatoare cu distribuție exponențială. De asemenea, ne vom situa în cazul unui regim staționar, în care probabilitatea ca în sistem să existe n unități la un moment dat nu depinde de timp. Vom presupune în plus că disciplina servirii este dată de regula următoare: unitățile sînt servite în ordinea intrării lor în sistemul de așteptare.

Modelele pe care le vom folosi sînt clasificate în raport cu numărul de stații și cu natura populației din care sosesc unitățile (finită sau infinită).

Notațiile pe care le vom folosi sînt următoarele:

λ — numărul mediu de unități sosite în unitatea de timp,
μ — numărul mediu de unități servite în unitatea de timp de către o stație,
ρ — factorul de utilizare sau intensitate de trafic,
s — numărul de stații,
m — volumul populației, în cazul în care acesta este finit,
N — numărul locurilor în firul de așteptare,
p_n — probabilitatea ca în sistem să existe n unități la un moment dat,
$\overline{n}$ — numărul mediu de unități din sistem, la un moment dat,
$\overline{n}_f$ — numărul mediu de unități din firul de așteptare la un moment dat,
$\overline{n}_s$ — numărul mediu de unități ce sînt servite la un moment dat,
$\overline{t}_f$ — timpul mediu de așteptare a unei unități în fir,
$\overline{t}_s$ — timpul mediu de așteptare a unei unități în sistem,
$P(n>k)$ — probabilitatea ca numărul unităților din sistem, la un moment dat, să fie mai mare decît un număr dat, k.
$P(t_f>t)$ — probabilitatea ca timpul de așteptare a unei unități în fir să fie mai mare decît un timp dat, t.

Scanned with OKEN Scanner

În continuare, dăm formulele de calcul al unor indicatori legați de fenomenul de așteptare, pentru cîteva modele cu sosiri poissoniene și timp de servire a unei unități exponențial, în cazul în care în firul de așteptare există teoretic un număr nelimitat de locuri.

După cum se știe, în astfel de modele, notînd cu $(0, t)$ un interval de timp oarecare, faptul că numărul de unități ce sosesc în acest interval are o natură poissoniană înseamnă că el se supune următoarei legi de distribuție:

$$f(n) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Se arată ușor că această distribuție are media egală cu t, ceea ce înseamnă că parametrul λ poate fi interpretat ca număr mediu de unități ce sosesc în sistemul de așteptare într-o unitate de timp.

Modelul cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu},$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)},$$

$$\bar{n}_s = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{p},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)},$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

$$P(n > k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1},$$

$$P(t_f > t) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot c^{-(\mu - \lambda)t}.$$

Modelul cu un fir de așteptare, o stație, populație finită:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} A_m^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n},$$

$$p_n = A_m^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0,$$

$$\bar{n} = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0),$$

$$n_f = m - \frac{\mu + \lambda}{\lambda}(1 - p_0),$$

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\mu}\left(\frac{m}{1 - p_0} - \frac{\mu + \lambda}{\lambda}\right),$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{m}{1 - p_0} - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Modelul cu un fir de așteptare, mai multe stații, populație infinită:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\mu}{(s-1)!\ (s\mu-\lambda)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s},$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \text{ pentru } n < s, \\ \frac{1}{s!\ s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \text{ pentru } n \geqslant s, \end{cases}$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda\mu}{(s-1)!\ (s\mu-\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0 + \frac{\lambda}{\mu},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda\mu}{(s-1)!\ (s\mu-\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0, \qquad \bar{n}_s = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\mu}{(s-1)!\ (s\mu-\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_0,$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}.$$

Modelul cu un fir de așteptare, mai multe stații, populație finită:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} C_m^n \rho^n + \frac{s^s}{s!} \cdot \sum_{n=1}^{m} A_m^n \left(\frac{\rho}{s}\right)^n},$$

$$p_n = \begin{cases} C_m^n \cdot \rho^n \cdot p_0, \text{ pentru } n < s, \\ \frac{s^s}{s!} \cdot A_m^n \left(\frac{\rho}{s}\right)^n \cdot p_0, \text{ pentru } s \leqslant n \leqslant m, \end{cases}$$

$$\bar{n} = p_0 \left[\frac{s\rho+s-m\rho}{\rho\,(1+\rho)} \cdot \sum_{n+0}^{s-1} C_m^n \cdot \rho^n + \frac{s\rho^{s-1} \cdot C_m^s}{1+\rho}\right] + \frac{m\rho-s}{\rho},$$

$$\bar{n}_f = \left(m - \frac{s}{\rho} - s\right) \cdot \left[1 - p_0 \cdot \sum_{n=0}^{s-1} C_m^n \cdot \rho^n\right] + s \cdot \rho^{s-1} \cdot C_m^s \cdot p_0,$$

$$\bar{n}_s = \bar{n} - \bar{n}_f, \quad \bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\mu \cdot \bar{n}_s}, \quad \bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}.$$

Deseori apare în practică nevoia de a cerceta sisteme de așteptare de tipul celor de mai sus, în care însă în firul de așteptare nu există decît un număr limitat de locuri, număr pe care îl notăm cu N. În astfel de modele, unitățile ce sosesc, în timpul cît toate locurile din firul de așteptare sînt ocupate, părăsesc definitiv sistemul (caută satisfacerea serviciului cerut în altă parte), fiind pierdute pentru fenomenul cercetat. În continuare, prezentăm cîteva din formulele ce se aplică la două dintre modelele de așteptare cu pierderi de unități.

Scanned with OKEN Scanner

Model cu un fir de aşteptare, o staţie, populaţie infinită şi fir de aşteptare limitat.

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}},$$

$$p_n = \begin{cases} \rho^n \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}, & \text{pentru } n = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ N+1, \\ 0, & \text{pentru } n = N+2,\ N+3,\ldots, \end{cases}$$

$$\bar{n} = \rho \cdot \frac{(N+1)\,\rho^{N+2} - (N+2)\cdot\rho^{N+1} + 1}{(1-\rho)\,(1-\rho^{N+2})},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^2}{(1-\rho)(1-\rho^{N+2})}\,[1-(N+1)\rho^N + N\cdot\rho^{N+1}],$$

$$\bar{t}_f = \frac{\rho}{\mu\,(1-\rho)\,(1-\rho^{N+1})}\cdot[1-(N+1)\,\rho^N + N\cdot\rho^{N+1}],$$

$$\bar{t}_s = \frac{1-(N+2)\,\rho^{N+1} + (N+1)\,\rho^{N+2}}{\mu\,(1-\rho)\,(1-\rho^{N+1})},$$

$$P\,(t_f > t) = \frac{\rho}{1-\rho^{N+2}}\cdot e^{-\mu t}\cdot \sum_{r=0}^{N-1}\frac{(\mu t)^r}{r!}\,(\rho^r - \rho^N).$$

Model cu un fir de aşteptare, mai multe staţii, populaţie infinită şi fir de aşteptare limitat.

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{s}\dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^s}{s!}\cdot\dfrac{\rho^*-\rho^{*N+1}}{1-\rho^*}}, \quad \text{unde : } \rho^* = \frac{\rho}{s},$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}\cdot p_0\ , & \text{pentru } n = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ s, \\ \dfrac{\rho^n}{s!\,s^{n-s}}\cdot p_0, & \text{pentru } n = s+1,\ s+2,\ldots,\ s+N, \\ 0, & \text{pentru } n > s+N, \end{cases}$$

$$\bar{n} = p_0\left[\rho\cdot\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!} - \frac{\rho^s}{s!}\cdot\sum_{k=1}^{N}k\cdot\left(\frac{\rho}{s}\right)^k + \frac{\rho^s}{(s-1)!}\cdot\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\rho}{s}\right)^k\right],$$

$$\bar{n}_f = p_s\cdot\sum_{k=1}^{N}k\cdot\left(\frac{\rho}{s}\right)^k = ps\cdot\rho^*\cdot\frac{1-(N+1)\rho^{*N} + N\cdot\rho^{*N+1}}{(1-\rho^*)^2},$$

$$\bar{t}_f = \frac{p_s}{s\cdot\mu\,(1-\rho^*)^2}\,[1-(N+1)\,\rho^{*N} + N\cdot\rho^{*N+1}],$$

$$P\,(t_f > t) = \frac{p_s}{(1-\rho^*)^2}\,e^{-s\mu t}\,[1-(N+1)\rho^{*N} + N\cdot\rho^{*N+1}].$$

Cazul unui timp de servire cu distribuţie oarecare. În cazul în care unor sosiri poissoniene, de parametru λ, le corespunde o lege oarecare de distribuţie a

Scanned with OKEN Scanner

timpului de servire a unei unități, cu media $\frac{1}{\mu}$ și dispersia σ_v^2, se pot aplica următoarele formule de calcul al indicatorilor fenomenului de așteptare cercetat:

$$\bar{n} = \frac{2\rho - \rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_v^2}{2(1-\rho)},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_v^2}{2(1-\rho)},$$

$$\bar{n}_s = \rho,$$

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \cdot \sigma_v^2}{2\lambda(1-\rho)},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}.$$

Cazul intensității variabile a servirii. Toate modelele de așteptare prezentate pînă aici presupun o lege de distribuție a timpului de servire ce nu se modifică în timp, fiind independentă de faptul că numărul unităților din firul de așteptare este mai mare sau mai mic. Se întîmplă însă uneori ca parametrii acestei legi de distribuție să se modifice, păstrîndu-se numai natura ei (exponențială sau oarecare). Modificarea apare de obicei la numărul mediu de unități ce pot fi servite de stațiile de servire într-o unitate de timp, acesta fiind cu atît mai mare, cu cît numărul unităților din firul de așteptare este mai mare. Acest fenomen are loc adesea datorită unor motive psihologice, lucrătorii ce asigură servirea unităților din sistemul de așteptare grăbindu-se atunci cînd observă un număr mare de unități în firul de așteptare. Evident că la o astfel de intensificare a servirii, în cazul modelelor cu o stație de servire, putem înlocui pe μ_n (numărul mediu de unități ce pot fi servite într-o unitate de timp atunci cînd în sistemul de așteptare există n unități) prin $n^c \cdot \mu_n$, unde c este un coeficient de intensificare a servirii, ce depinde de modelul practic cercetat. De asemenea, în cazul modelelor cu mai multe stații, vom înlocui pe μ_n prin:

$$\left(\frac{n}{s}\right)^c \cdot \mu_n, \text{ dacă } n \geqslant s,$$

unde $\frac{n}{s}$ este numărul unităților din sistemul de așteptare, ce revin unei stații de servire. Făcînd înlocuirile specificate, în cazul unui model cu populație infinită și cu s stații (eventual $s=1$), obținem următoarele formule ale unora dintre indicatorii modelului cercetat:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{s^s}{s!}\right)^{s-c} \cdot \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s^{n(s-c)} \cdot (n!)^c}},$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, & \text{dacă } n \leqslant s \\ \left(\frac{s^s}{s!}\right)^{1-c} \cdot \frac{\rho^n}{s^{n(1-c)} \cdot (n!)^c}, & \text{dacă } n > s, \end{cases}$$

$$\bar{n}_f = p_0 \cdot \left(\frac{s^s}{s!}\right)^{s-c} \cdot \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n \cdot (n-1)}{s^{n(1-c)} \cdot (n!)^c},$$

$$\bar{n} = \bar{n}_f + s - (s-\rho) \sum_{n=0}^{s-1} p_n - \rho \cdot p_{s-1},$$

$$\bar{t}_f = \frac{n_f}{\lambda},$$

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cazul intensității variabile a sosirilor. În mod asemănător cu cazul prezentat mai sus, se poate considera o „slăbire" a intensității sosirilor, pe măsură ce numărul unităților din firul de așteptare este mai mare. O astfel de micșorare a intensității sosirilor poate avea de asemenea o interpretare psihologică, unele unități nou sosite renunțînd la așteptare atunci cînd observă că această așteptare este posibil mare. Pentru a considera în calcul această slăbire a intensității sosirilor, putem înlocui pe λ_n, numărul mediu de unități ce sosesc în sistemul de așteptare pe unitatea de timp, atunci cînd în sistem există n unități, prin:

$$\left(\frac{s}{n+1}\right)^c \cdot \lambda_n, \text{ dacă } n \geqslant s.$$

§ 2. PROBLEME REZOLVATE

Problema 1. Pentru aplicarea unei anumite faze a prelucrării unor piese, aceste piese sosesc la o mașină în mod aleator. S-a testat, cu ajutorul metodelor statistice, că sosirea pieselor este de natură poissoniană, cu media de șapte sosiri pe oră.

Presupunînd că mașina s-a defectat la un moment dat și că reparația ei durează trei ore, să se determine probabilitățile ca după aceste trei ore să aștepte pentru prelucrare:

a) nici o piesă, b) 7 piese, c) 14 piese,
d) 20 piese, e) 21 piese, f) 30 piese.

Rezolvare. Sosirile pieselor la mașină, pentru prelucrare, fiind de natură poissoniană cu $\lambda = 7$, probabilitățile cerute se calculează cu ajutorul următoarei formule:

$$f_n = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-21} \cdot \frac{21^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Aplicînd formula, obținem următoarele rezultate, folosind în calcul tabelele de logaritmi:

a) $f_{(0)} = e^{-21} \approx 0{,}115 \cdot 10^{-10} \approx 0$,

b) $f_{(7)} = e^{-21} \cdot \frac{21^7}{7!} \approx 0{,}00028 = 0{,}028\%$,

c) $f_{(14)} = e^{-21} \cdot \frac{21^{14}}{14!} \approx 0{,}0282 = 2{,}82\%$,

d) $f_{(20)} = e^{-21} \cdot \frac{21^{20}}{20!} \approx 0{,}0867 = 8{,}67\%$,

e) $f_{(21)} = e^{-21} \cdot \frac{21^{21}}{21!} = f_{(20)} \approx 8{,}67\%$,

f) $f_{(30)} = e^{-21} \cdot \frac{21^{30}}{30!} \approx 0{,}0133 = 1{,}33\%$.

Problema 2. La o intersecție de două străzi, într-un oraș mare, există un stop. Cercetările statistice anterioare au arătat că, pe una din direcțiile de mers

Scanned with OKEN Scanner

ale străzii celei mai solicitate, fluxul mașinilor într-o perioadă de vîrf este poissonian, cu media de 240 mașini pe oră. Datorită unor condiții de așezare a intersecției, este de dorit ca numărul mașinilor ce așteaptă la stop în oricare moment, în direcția cercetată, să nu fie mai mare decît cinci.

Să se arate care este timpul maxim în care poate fi menținută culoarea roșie a semaforului, pe direcția cercetată, astfel încît doleanța enunțată mai sus să fie satisfăcută cu o probabilitate egală cel puțin cu:

a) 90%, b) 99%.

Rezolvare. Vom considera ca unitate de timp minutul. Deoarece fluxul sosirilor este poissonian, cu media egală cu:

$$\lambda = 240 \text{ mașini/oră} = 4 \text{ mașini/minut},$$

probabilitatea ca într-un interval de timp, de lungime egală cu t, să sosească la stop n mașini este dată de formula:

$$f(n) = e^{-4t} \cdot \frac{(4t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

a) Trebuie să găsim valoarea maximă pentru t, astfel încît să avem:

$$\sum_{n=0}^{5} f(n) \geqslant 0{,}9$$

sau:

$$\varphi(t) = e^{-4t} \cdot \sum_{n=0}^{5} \frac{(4t)^n}{n!} \geqslant 0{,}9.$$

Calculînd valoarea funcției $\varphi(t)$, pentru diferite valori ale lui t, obținem valorile conținute în tabelul IV.1, din care rezultă că timpul cerut este aproximativ:

$$t \approx 0{,}78 \text{ minute} \approx 47 \text{ secunde}.$$

Tabelul IV.1

t	$\varphi(t)$
0,77	0,906
0,78	0,903
0,79	0,89

b) Pentru a găsi valoarea maximă a lui t, pentru care avem satisfăcută inegalitatea

$$\varphi(t) = e^{-4t} \cdot \sum_{n=0}^{5} \frac{(4t)^n}{n!} \geqslant 0{,}99,$$

Scanned with OKEN Scanner

cercetăm tabelul IV.2, obținut prin calcularea valorilor funcției $\varphi(t)$ pentru cîteva valori particulare ale lui t. Din acest tabel, rezultă că timpul cerut are aproximativ următoarea valoare:

$$t \approx 0{,}43 \text{ minute} \approx 26 \text{ secunde.}$$

Tabelul IV.2

t	$\varphi(t)$
0,42	0,992
0,43	0,991
0,44	0,989

În concluzie, pentru a avea cel puțin 90% șanse ca la stop, pe direcția cercetată, să nu aștepte niciodată mai mult de cinci mașini, culoarea roșie a semaforului trebuie menținută cel mult 47 secunde, iar pentru ca aceste șanse să crească la peste 99%, este nevoie ca culoarea roșie a semaforului să se mențină cel mult 26 secunde.

Problema 3. Pentru a cerceta fluxul de autovehicule pe o șosea solicitată în mod intens, pe o anumită direcție de circulație într-o perioadă de vîrf a zilei, s-a observat numărul de autovehicule ce au trecut în direcția considerată, prin dreptul unei porțiuni mici a acestei șosele, în 40 intervale de cîte un minut, intervale luate la întîmplare în perioada de vîrf considerată în diferite zile. S-au obținut, în acest fel, datele statistice din tabelul IV.3.

Tabelul IV.3.

Nr. autovehicule	Nr. observații	Nr. autovehicule	Nr. observații
0	1	7	10
1	4	8	5
2	10	9	3
3	14	10	—
4	15	11	—
5	15	12	1
6		13	1

Într-o zonă a șoselei menționate există o barieră, ce este folosită la intervale mari de timp, în timpul zilei. În perioada de vîrf amintită mai sus, bariera este folosită pentru asigurarea trecerii unui tren, timp de zece minute.

a) Să se testeze că fluxul de autovehicule pe șosea, în direcția considerată, este de natură poissoniană, estimînd totodată și numărul mediu de autovehicule ce trec într-un minut prin fiecare loc al șoselei, în direcția respectivă.

b) Să se determine numărul mediu de autovehicule ce așteaptă ridicarea barierei, după cele zece minute, cît ea este folosită,

c) Să se arate că probabilitatea sosirii a cel puțin trei autovehicule în intervalul cît bariera este folosită este practic egală cu unitatea.

d) Să se calculeze distribuțiile de probabilitate ale timpurilor de așteptare la barieră a primelor trei autovehicule sosite după lăsarea barierei, în ipoteza că în timpul celor zece minute, cît bariera este lăsată, sosesc cel puțin trei autovehicule (eveniment de altfel aproape cert). Să se deducă apoi, cu ajutorul acestor distribuții, timpul mediu de așteptare, pentru fiecare dintre cele trei autovehicule.

Rezolvare. a) Pentru testarea naturii poissoniene a fluxului de autovehicule pe șosea, calculăm mai întîi media de selecție a numărului de autovehicule ce trec într-un minut prin fiecare loc al șoselei. Pentru aceasta, s-a calculat colcana a treia a tabelului IV.4, a cărei sumă se folosește în aplicarea formulei ce urmează:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{x=0}^{13} x \cdot N_x}{\sum_{x=0}^{13} N_x} = \frac{412}{80} = 5{,}15 \text{ autovehicule/minut.}$$

Tabelul IV.4

x	N_x	$x \cdot N_x$	N'_x	$N_x - N'_x$	$\frac{(N_x - N'_x)^2}{N'_x}$
0	1	0	0,46		
1	1 } 6	1	2,39 } 9,00	3,00	1,00
2	4	8	6,15		
3	10	30	10,56	−0,56	0,03
4	14	56	13,60	0,40	0,01
5	15	75	14,00	1,00	0,07
6	15	90	12,00	3,00	0,75
7	10	70	8,83	1,17	0,16
8	5	49	5,68	−0,68	0,08
9	3	27	3,25		
10	0	0	1,67		
11	0 } 5	0	0,78 } 6,16	−1,16	0,22
12	1	12	0,33		
13	1	13	0,13		
Total	80	412	—	—	$2{,}32 = \chi^2_c$

După cum se știe, această medie de selecție estimează parametrul λ al eventualei distribuții Poisson a fluxului cercetat,

$$\lambda = 5{,}15 \text{ autovehicule/minut.}$$

Pentru testarea efectivă a ipotezei că fluxul de autovehicule este de natură poissoniană, aplicăm testul χ^2 în care scop calculăm ultimele trei coloane ale tabelului IV.4, după cum urmează.

Pentru a calcula frecvențele absolute teoretice, folosim formula următoare:

$$N'_x = 80 \cdot \frac{5,15^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 13,$$

pe care o aplicăm direct numai pentru valoarea $x = 5$, considerată ca cea mai probabilă:

$$N'_5 = 80 \cdot \frac{5,15^6}{6!} \approx 14.$$

Pentru valorile $x < 5$, folosim valoarea obținută mai sus, aplicînd succesiv următoarea formulă de recurență:

$$N'_{x-1} = \frac{x}{\lambda} \cdot N'_x, \quad x = 5, 4, 3, 2, 1.$$

Obținem astfel valorile:

$$N'_4 = \frac{5}{5,15} \cdot 14 \approx 13,60,$$

$$N'_3 = \frac{4}{5,15} \cdot 13,60 \approx 10,56,$$

$$N'_2 = \frac{3}{5,15} \cdot 10,56 \approx 6,15,$$

$$N'_1 = \frac{2}{5,15} \cdot 6,15 \approx 2,39,$$

$$N'_0 = \frac{1}{5,15} \cdot 2,39 \approx 0,46.$$

Pentru valorile $x > 5$, folosim de asemenea valoarea obținută pentru N'_5, aplicînd succesiv următoarea formulă de recurență:

$$N'_{x+1} = \frac{\lambda}{x+1} \cdot N'_x, \quad x = 5, 6, 7, \ldots, 13.$$

Obținem astfel valorile:

$$N'_6 = \frac{5,15}{6} \cdot 14 \approx 12,00,$$

$$N'_7 = \frac{5,15}{7} \cdot 12 \approx 8,83,$$

$$N'_8 = \frac{5,15}{8} \cdot 8,83 \approx 5,68,$$

$$N'_9 = \frac{5,15}{9} \cdot 5,68 \approx 3,25,$$

$$N'_{10} = \frac{5,15}{10} \cdot 3,25 \approx 1,67.$$

$$N'_{11} = \frac{5,15}{11} \cdot 1,67 \approx 0,78,$$

$$N'_{12} = \frac{5,15}{12} \cdot 0,78 \approx 0,33,$$

$$N'_{13} = \frac{5,15}{13} \cdot 0,33 \approx 0,13.$$

După cum se vede în tabelul IV.4, valorile mici ale lui N_x, corespunzătoare lor ale lui N'_x, au fost cumulate în cîte o singură valoare de fiecare tip, la fiecare extremitate a tabelului.

Scanned with OKEN Scanner

Ultimele două coloane ale tabelului IV.4 se calculează ușor conform expresiilor ce le reprezintă, calculele efectuîndu-se pe fiecare linie în parte. Ca rezultat al ultimei coloane, obținem suma următoare:

$$\chi_c^2 = \Sigma \frac{(N_x - N_x')^2}{N_x'} = 2{,}32.$$

Se știe însă că, dacă ipoteza sosirilor poissoniene este admisă, o expresie de forma

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(N_x - N_x')^2}{N_x'}$$

are o distribuție de probabilitate de tipul χ^2, cu: $\nu = (k-1)-1$ grade de libertate (deoarece s-a estimat un singur parametru), k fiind numărul termenilor sumei. În cazul nostru, deoarece în suma calculată s-au folosit $k = 8$ termeni, vom folosi pentru testare o distribuție χ^2 cu șase grade de libertate. Considerînd drept nivel de semnificație $\varepsilon = 0{,}95$, din tabele corespunzătoare acestei distribuții extragem:

$$\chi_\varepsilon^2 = 18{,}3.$$

Deoarece avem evident $\chi_c^2 < \chi_\varepsilon^2$, acceptăm ipoteza naturii poissoniene a fluxului de autovehicule de pe șosea, cu valoarea estimată anterior pentru parametrul λ.

b) Deoarece, în medie, sosesc la barieră $\lambda = 5{,}15$ autovehicule pe minut, numărul mediu de autovehicule ce sosesc în zece minute, cît bariera este lăsată, va fi egal cu:

$$10 \cdot 5{,}15 = 51{,}5 \text{ autovehicule.}$$

c) Distribuția numărului de mașini sosite la barieră, în intervalul de timp $t = 10$ minute, este o distribuție Poisson, dată prin următoarea funcție de probabilitate:

$$f(n) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-51{,}5} \cdot \frac{(51{,}5)^n}{n!}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

Probabilitatea sosirii a cel puțin trei autovehicule, în intervalul de timp menționat, este deci egală cu:

$$1 - f(0) - f(1) - f(2) = 1 - e^{-51{,}5}\left(1 + \frac{51{,}5}{1!} + \frac{51{,}5^2}{2!}\right) \approx 1 - 5{,}964 \cdot 10^{-20} \approx 1.$$

d) Să considerăm momentul lăsării barierei ca moment inițial și să notăm cu τ_1 timpul după care sosește primul autovehicul la barieră. Deducem ușor că τ_1 este o variabilă aleatoare, a cărei funcție de repartiție are forma următoare:

$$P(\tau < t) = 1 - f(0, t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0,$$

deoarece producerea evenimentului $(\tau_1 < t)$ este echivalentă cu sosirea a cel puțin unui autovehicul la barieră în intervalul de timp $(0, t)$, de lungime egală cu t. Recunoaștem funcția de repartiție a distribuției exponențiale de parametru λ, a cărei densitate de probabilitate este:

$$\varphi_1(t) = (1 - e^{-\lambda t})' = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că media acestei variabile aleatoare este

$$\bar{\tau} = \int_0^\infty t \cdot \varphi_1(t)\, dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Considerînd acum variabila aleatoare T_1, egală cu timpul de așteptare la barieră al primului autovehicul sosit după punerea barierei, avem:

$$T_1 = 10 - \tau,$$

de unde deducem valoarea sa medie:

$$\bar{T}_1 = 10 - \bar{\tau} = 10 - \frac{1}{5,15} \approx 9,8 \text{ minute.}$$

Să notăm acum cu τ_2 timpul după care sosește la barieră cel de al doilea autovehicul. Deoarece, conform condițiilor problemei, avem certitudinea că în cele zece minute cît este lăsată bariera sosesc cel puțin două autovehicule, producerea evenimentului $(\tau < t)$ este echivalentă cu sosirea a cel puțin două autovehicule în timpul t.

Avem deci:

$$P(\tau_2 < t) = 1 - f(0; t) - f(1; t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare τ_2 este prin urmare următoarea:

$$\varphi_2(t) = (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \cdot e^{-\lambda t})' = \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Valoarea medie a acestei variabile se calculează ușor, conducînd la:

$$\bar{\tau}_2 = \int_0^\infty t \cdot \varphi_2(t)\, dt = \frac{2}{\lambda},$$

astfel încît valoarea medie a timpului T_2 de așteptare a celui de al doilea autovehicul sosit la barieră este:

$$\bar{T}_2 = 10 - \bar{\tau}_2 = 10 - \frac{2}{5,15} \approx 9,61 \text{ minute.}$$

În sfîrșit, notînd cu τ_3 timpul după care sosește la barieră cel de al treilea autovehicul, conform condițiilor problemei avem:

$$P(\tau_3 < t) = 1 - f(0; t) - f(1; t) - f(2; t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \cdot e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0.$$

Densitatea de probabilitate a variabilei τ_3 este:

$$\varphi_3(t) = \left(1 - e^{-\lambda t} - \lambda t \cdot e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}\right) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

valoarea sa medie:

$$\bar{\tau}_3 = \int_0^{\infty} t \cdot \varphi_3(t) \cdot dt = \frac{3}{\lambda}.$$

Timpul mediu de așteptare al celui de al treilea autovehicul sosit la barieră este deci următorul:

$$\bar{T}_3 = 10 - \bar{\tau}_3 = 10 - \frac{3}{\lambda} \approx 9{,}42 \text{ minute.}$$

Problema 4. Se urmărește mărirea capacității de producție a unei întreprinderi, fapt pentru care se propune construirea unei noi secții, în care anumite piese, aduse la o anumită etapă de prelucrare a lor, urmează să fie prelucrate în continuare de către o mașină. Pentru dimensionarea acestei secții, se cercetează din punct de vedere statistic secții analoage din întreprinderea respectivă, sau din alte întreprinderi, obținîndu-se următoarele rezultate:

— sosirea pieselor la secția respectivă va fi aleatoare, urmînd o distribuție Poisson, cu media de 5,75 piese pe oră,

— timpul de prelucrare a unei piese în secție va fi aleator, urmînd o distribuție exponențială, cu media de zece minute.

Știind că, pentru fiecare piesă ce așteaptă în secție să intre la prelucrare, trebuie afectată o suprafață de cel puțin 10 dm², să se arate cît de mare trebuie să fie suprafața de depozitare a pieselor pentru așteptare, astfel încît această suprafață să acopere nevoile secției cu o probabilitate egală cu cel puțin:

a) 90% , b) 99%.

Rezolvare. Modelul matematic de așteptare, în care se încadrează fenomenul descris, este un model cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, firul de așteptare putînd fi teoretic nelimitat. Avem:

$\lambda = 5{,}75$ piese/oră,

$$\mu = \frac{1}{10} \text{ piese/minut} = 6 \text{ piese/oră.}$$

a) Trebuie determinată cea mai mică valoare naturală k, astfel încît să avem

$$P(n > k) \leqslant 0{,}1.$$

Folosind formula corespunzătoare pentru $P(n>k)$, inecuația de mai sus devine:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \leqslant 0{,}1$$

sau:

$$\left(\frac{23}{24}\right)^{k+1} \leqslant 0{,}1.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici, obținem succesiv:

$$(k+1)\log\frac{23}{24} \leqslant -1,$$

$$k+1 \geqslant -\frac{1}{\log\frac{23}{24}},$$

$$k \geqslant \frac{1}{0{,}01848} - 1,$$

$$k \geqslant 53{,}11.$$

Va trebui să luăm pentru k valoarea 54, deci să afectăm pentru așteptarea pieselor în secție o suprafață de cel puțin 540 dm².

b) De această dată trebuie să avem:

$$P(n \geqslant k) \leqslant 0{,}01,$$

obținem în mod asemănător: $k \geqslant 107{,}22$.

Vom considera deci $k = 108$, adică vom afecta, pentru așteptarea pieselor în secție, o suprafață de cel puțin 1080 dm².

Problema 5. La un ghișeu public, unde sosirile solicitanților sînt rare, avînd o natură poissoniană cu media $\lambda = 12$ persoane/oră, lucrul este organizat în modul următor:

— cînd există un singur solicitant la ghișeu, acesta este servit de un singur salariat, care poate servi solicitantul într-un timp ce urmează o distribuție exponențială cu media $\frac{1}{\mu_1} = 3$ minute;

— cînd există doi solicitanți la ghișeu, este trimis și un al doilea salariat pentru ajutor, lucrînd împreună pentru servirea aceleiași persoane, ceea ce face ca timpul de servire a fiecărei persoane să aibă o distribuție exponențială cu media $\frac{1}{\mu_2} = 1{,}8$ minute;

— cînd există mai mult de doi solicitanți la ghișeu, sînt trimiși doi salariați în ajutorul celui inițial, astfel încît distribuția timpului de servire a unei persoane devine exponențială cu media $\frac{1}{\mu_3} = 1{,}2$ minute.

a) Să se deducă ecuațiile de stare ale modelului de așteptare generat în modul arătat mai sus, în regim staționar.

b) Să se găsească formulele generale ale probabilităților ca numărul de solicitanți de la ghișeu, la un moment dat, să fie egal respectiv cu 0, 1, 2, 3,... Să se aplice apoi formulele obișnuite, în cazul numeric prezentat, pentru calculul valorilor p_0, p_1, p_2 și p_3.

c) Să se găsească formule generale, care să exprime numărul mediu de solicitanți ce așteaptă în sistem, respectiv în fir, la un moment dat. Să se aplice apoi aceste formule, în cazul numeric prezentat.

d) Să se compare rezultatele obținute cu rezultatele analoage ce apar în cazul cînd fiecare persoană este servită totdeauna de un singur salariat, doi salariați, respectiv trei salariați, toți acești salariați formînd o singură stație de servire.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Notînd cu $p_n(t)$ probabilitatea ca la momentul t să existe în sistemul de așteptare n unități, pentru a determina expresia acestei probabilități, trebuie să considerăm pe rînd cele patru cazuri indicate în continuare.

Pentru $n = 0$, ținem seama de faptul că următoarele evenimente, ce pot avea loc într-un interval mic de timp, de lungime egală cu Δt, au probabilitățile ce urmează:

— nu sosește nici o unitate în sistem, eveniment cu probabilitatea egală cu $1 - \lambda \cdot \Delta t + 0(\Delta t)$*, indiferent de numărul unităților existent în sistem,

— o unitate părăsește sistemul, cu condiția că în sistem există inițial o singură unitate, eveniment cu probabilitatea egală cu:

$$\mu_1 \cdot \Delta t + 0(\Delta t).$$

Se poate scrie deci următoarea egalitate, ținînd seama de descompunerea evenimentului astfel ca la momentul $t + \Delta t$ să nu existe nici o unitate în sistem:

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) \cdot [1 - \lambda \cdot \Delta t + 0(\Delta t)] + p_1(t) \cdot [1 - \lambda \cdot \Delta t + 0(\Delta t)] \cdot \cdot [\mu_1 \cdot \Delta t + 0(\Delta t)].$$

Această egalitate se poate pune ușor sub forma următoare:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t) + A(t) \cdot \Delta t,$$

unde $A(t)$ este o cantitate cu limită finită, atunci cînd Δt tinde la zero. Trecînd la limită egalitatea, pentru $\Delta t \to 0$, obținem deci:

$$\frac{\mathrm{d}\, p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t).$$

Notînd în general prin p_n probabilitatea ca la un moment oarecare să existe n unități în sistemul de așteptare, în cazul unui regim staționar (p_n nu mai depinde de t), ecuația obținută mai sus devine pentru un astfel de regim:

$$-\lambda \cdot p_0 + \mu_1 \cdot p_1 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Procedînd în mod asemănător pentru cazurile $n = 1$, $n = 2$ și $n \geqslant 3$, obținem încă ecuațiile următoare:

$$\lambda p_0 - (\lambda + \mu_1) \cdot p_1 + \mu_2 p_2 = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda p_1 - (\lambda + \mu_2) \cdot p_2 + \mu_3 p_3 = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu_3) \cdot p_n + \mu_3 p_{n+1} = 0, \qquad n \geqslant 3. \qquad \text{(IV)}$$

b) Din ecuația de stare (I), deducem:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot p_0.$$

---

* Se notează prin $0(\Delta t)$ o mărime oarecare, ce are următoarea proprietate:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind această valoare în (II), obținem din această ecuație:

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} \cdot p_0.$$

Folosind expresiile lui p_1 și p_2 de mai sus, deducem succesiv, cu ajutorul lui (IV), expresii pentru p_3, p_4, p_5,..., de forma generală ce urmează:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1 \mu_2 \mu_3^{n-2}} \cdot p_0 = \frac{\mu_3^2}{\mu_1 \mu_2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_3}\right)^n \cdot p_0, \quad n \geqslant 3.$$

Trebuie însă să avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$$

sau:

$$p_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda^3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{\lambda^4}{\mu_1 \mu_2 \mu_3^2} + \ldots\right] = 1.$$

Din această egalitate, scoatem pe p_0 sub forma următoare:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_3}\right)^k}$$

Seria de la numitor este convergentă dacă și numai dacă avem:

$$\theta = \frac{\lambda}{\mu_3} < 1$$

caz în care suma ei este:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu_3}} = \frac{\mu_3}{\mu_3 - \lambda}.$$

Avem deci următoarea formulă de calcul pentru p_0:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 (\mu_3 - \lambda)}}$$

Cu valoarea obținută pentru p_0, revenim în formulele obținute mai sus, astfel încît putem scrie:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu_1} + \dfrac{\lambda^2 \mu_3}{\mu_1 \mu_2 (\mu_3 - \lambda)}}, & \text{pentru } n = 0, \\ \dfrac{\lambda}{\mu_1} \cdot p_0, & \text{pentru } n = 1, \\ \dfrac{\lambda_2}{\mu_1 \mu_2} \cdot p_0, & \text{pentru } n = 2, \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu_1 \mu_2 \mu_3^{n-2}}, & \text{pentru } n = 3. \end{cases}$$

În cazul numeric prezentat, considerînd ca unitate de timp ora, avem următoarele valori ale parametrilor modelului:

$$\lambda = 12 \text{ persoane/oră},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3} \text{ persoane/minut} = 20 \text{ persoane/oră},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1{,}8} \text{ persoane/minut} = \frac{100}{3} \text{ persoane/oră},$$

$$\mu_3 = \frac{1}{1{,}2} \text{ persoane/minut} = 50 \text{ persoane/oră}.$$

Folosind formulele obținute mai sus, găsim:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{12}{20} + \frac{12^2 \cdot 50}{20 \cdot \frac{100}{3}(50 - 12)}} = \frac{95}{179} \approx 0{,}53072,$$

$$p_1 = \frac{12}{20} \cdot 0{,}53072 \approx 0{,}318,$$

$$p_2 = \frac{12^2}{20 \cdot \frac{100}{3}} \cdot 0{,}53072 \approx 0{,}115,$$

$$p_3 = \frac{12^3}{20 \cdot \frac{100}{3} \cdot 50} \cdot 0{,}53072 \approx 0{,}0275.$$

c) Aplicînd formula de definiție a numărului mediu de unități ce se găsesc în firul de așteptare la un moment dat, avem următoarele calcule:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n = p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n \cdot \frac{\mu_3^2}{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{\lambda}{\mu_3}\right)^n p_0\right) = \frac{\lambda}{\mu_1} p_0 + \frac{\mu_3^2}{\mu_1 \mu_2} p_0 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n\, \theta^n =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu_1} p_0 + \frac{\mu_3^2}{\mu_1 \mu_2} p_0\, \theta \sum_{n=2}^{\infty} n\, \theta^{n-1}.$$

Avem însă $\sum_{n=2}^{\infty} n\, \theta^{n-1} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \theta^n\right)' = \left(\frac{\theta^2}{1-\theta}\right)' = \frac{2\theta - \theta^2}{(1-\theta)^2}$, astfel încît:

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu_1} p_0 + \frac{\mu_3^2}{\mu_1 \mu_2} \cdot p_2 \cdot \theta \cdot \frac{2 - \theta^2}{(1-\theta)^2}.$$

Înlocuind pe θ prin raportul $\frac{\lambda}{\mu_3}$, obținem în final următoarea formulă:

$$\bar{n} = p_0 \left[\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2 \mu_3 (2\mu_3 - \lambda^2)}{\mu_1 \mu_2 (\mu_3 - \lambda)^2}\right],$$

Pentru a calcula numărul mediu de unităţi ce există în firul de aşteptare la un moment dat, aplicăm de asemenea formula de definiţie şi obţinem succesiv:

$$\overline{n}_f = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\mu_3^2}{\mu_1 \mu_2} \theta^{n+1} \cdot p_0 = \frac{\mu_3^2 p_0 \theta^2}{\mu_1 \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \theta^{n-1}.$$

Analog cu calculul ajutător de mai sus, avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \theta^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \right)' = \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right)' = \frac{1}{(1-\theta)^2},$$

astfel încît obţinem în final următoarea formulă:

$$\overline{n}_f = \frac{\mu_3^2 p_0 \theta^2}{\mu_1 \mu_2} \cdot \frac{1}{(1-\theta)^2} = \frac{\lambda^2 \mu_3^2}{\mu_1 \mu_2 (\mu_3 - \lambda)^2} \cdot p_0.$$

O b s e r v a ţ i e. Pentru $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, formula ce dă numărul mediu de unităţi ce se găsesc în sistem la un moment dat se transformă evident în formula analoagă de la modelul de aşteptare cu un fir, o staţie, populaţie infinită şi anume:

$$\overline{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Această observaţie este valabilă şi pentru formula care dă numărul mediu de unităţi ce se găsesc în firul de aşteptare la un moment dat.

În cazul numeric prezentat, aplicînd formulele de mai sus, obţinem:

$$\overline{n} = 0{,}53072 \left[\frac{12}{20} + \frac{12^2 \cdot 50 (2 \cdot 50 - 12)}{20 \cdot \frac{100}{3} (50-12)^2} \right] \approx 0{,}67 \text{ persoane},$$

$$\overline{n}_f = \frac{12^2 \cdot 50^2}{20 \cdot \frac{100}{3} (50-12)^2} \cdot 0{,}53072 \approx 0{,}198 \text{ persoane}.$$

d) Comparaţia cerută rezultă din tabelul IV.5, din care rezultă că modelul cercetat se situează între modelul cu $\mu = 20$ şi cel cu $\mu = \frac{100}{3}$, destul de apropiat faţă de acesta din urmă. Avantajul lui este însă acela că cel de al doilea salariat poate fi folosit la alte lucrări o mare parte din timp şi anume aproape 85% din timpul unei zile de lucru, deoarece:

$$p_0 + p_1 = 0{,}5307 + 0{,}318 \approx 0{,}85 = 85\%.$$

Problema 6. Se preconizează construirea unei staţii de reparat automobile, fapt pentru care se fac cercetări statistice, în vederea determinării suprafeţei necesare pentru aşteptare. Se ajunge la concluzia că sosirile automobilelor la staţie vor fi de natură poissoniană, cu media de $\lambda = 5$ automobile pe oră. În staţie vor lucra trei mecanici, care repară automobilele, într-un timp ce are o distribuţie exponenţială, cu media de 30 minute.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV.5

Modelul	p_0	$\bar{n}$	$\bar{n}_f$
$\mu = 20$	0,4	1,5	0,9
$\mu = \frac{100}{3}$	0,64	0,56	0,205
$\mu = 50$	0,76	0,32	0,08
$\mu_1 = 20$ $\mu_2 = \frac{100}{3}$ $\mu_3 = 50$	0,53	0,67	0,198

Să se arate pentru cîte automobile trebuie dimensionată suprafaţa de aşteptare, astfel încît ea să corespundă cerinţelor în proporţie de:

a) 50%, b) 80%, c) 90%.

Rezolvare. Modelul de aşteptare corespunzător problemei este un model cu un fir, trei staţii de servire, populaţie infinită. Avem:

$s = 3$ staţii,

$\lambda = 5$ automobile/oră,

$\mu = \frac{1}{30}$ automobile/minut $= 2$ automobile/oră,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{2}$.

Aplicînd formula corespunzătoare modelului menţicnat, obţinem:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\rho^n + \frac{1}{(s-1)!\,(s-\rho)} \cdot \rho^s} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2} + \frac{25}{8} + \frac{125}{8}} = \frac{8}{178} \approx 0{,}045.$$

Cu ajutorul acestei valori, se pot calcula probabilităţile p_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Notînd în general cu α proporţia în care suprafaţa de aşteptare trebuie să corespundă cerinţelor, trebuie să determinăm numărul natural k, astfel încît să avem:

$$\sum_{n=0}^{k} p_n \geqslant \alpha.$$

a) În tabelul IV.6 se găsesc valorile calculate ale probabilităților p_n, pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4$, precum și sumele de forma $\sum_{n=0}^{k} p_n$, pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Din acest tabel se deduce ușor că cea mai mică valoare a lui k, pentru care este verificată inegalitatea: $\sum_{n=0}^{k} p_n \geqslant 0{,}50$, este $k = 4$. Pentru

Tabelul IV. 6

k	n	p_n	$\sum_{n=0}^{k} p_n$
0	0	0,045	0,045
1	1	0,113	0,158
2	2	0,140	0,298
3	3	0,117	0,415
4	4	0,0975	0,5125

a corespunde cerințelor în proporție de peste 50%, suprafața de staționare a automobilelor în stație, pentru reparații, trebuie să asigure posibilitatea de staționare a patru automobile, inclusiv cele ce sînt efectiv în reparație.

b) Deoarece continuarea tabelului IV.6 cere calcule mari, ce vor fi din ce în ce mai puțin precise, rezolvăm inecuația de mai sus cu ajutorul formulelor generale pentru calculul lui p_n. Astfel, această inecuație capătă următoarea formă, presupunînd $k > s$;

$$p_0 + p_1 + p_2 + \sum_{n=3}^{k} \frac{s^s}{s!}\left(\frac{\rho}{s}\right)^n \geqslant \alpha,$$

sau

$$\frac{s^s}{s!}\sum_{n=3}^{k}\left(\frac{\rho}{s}\right)^n \geqslant \alpha - 0{,}298.$$

Înlocuind valorile lui s și ρ și efectuînd unele calcule, inecuația devine:

$$\sum_{n=3}^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant \frac{\alpha - 0{,}298}{0{,}2025}.$$

În sfîrșit, folosind suma progresiei geometrice din partea stîngă a inegalității de mai sus, ea devine:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} \leqslant \frac{36{,}0405 - 36\,\alpha}{25{,}3125}.$$

De aici, prin logaritmare (în baza zece), ținînd seama și de faptul că $\log \frac{5}{6} < 0$, obținem:

$$k \geqslant 2 + \frac{\log \frac{36{,}0405 - 36\alpha}{25{,}3125}}{\log \frac{5}{6}}.$$

Pentru $\alpha = 0{,}8$, se obține:

$$k \geqslant 2 + \frac{\bar{1}{,}45645}{\bar{1}{,}91751} = 2 + \frac{0{,}54355}{0{,}08249} \approx 8{,}6.$$

Trebuie să asigurăm deci loc de staționare pentru cel puțin nouă automobile, pentru a asigura cerințele în proporție cel puțin de 80%.

c) Pentru $\alpha = 0{,}9$, obținem ca mai sus:

$$k \geqslant 2 + \frac{\bar{2}{,}95781}{\bar{1}{,}91751} = 2 + \frac{1{,}04219}{0{,}08249} \approx 14{,}63.$$

De această dată, rezultă că trebuie asigurat locul de staționare a 15 automobile (inclusiv cele în reparație), caz în care cerințele vor fi satisfăcute în proporție de peste 90%.

Problema 7. Într-o secție a unei întreprinderi se află trei mașini, specializate în prelucrarea unor piese. Deoarece întreprinderea dorește să organizeze secția în așa fel încît numărul pieselor ce așteaptă la un moment dat să fie prelucrate să nu fie prea mare, se face o cercetare în acest sens. Se constată că legea sosirii pieselor este poissoniană, sosind în medie zece piese pe oră; timpul de prelucrare a unei piese la o mașină are o lege exponențială, putîndu-se prelucra în medie șase piese pe oră.

Să se determine:

a) probabilitatea ca în secție să nu existe nici o piesă neprelucrată la un moment dat;

b) probabilitatea ca în secție să nu existe nici o piesă care să aștepte să fie prelucrată la un moment dat;

c) numărul mediu de piese care așteaptă să fie prelucrate la un moment dat, precum și numărul mediu de piese neprelucrate, care există în secție la un moment dat;

d) timpul mediu de așteptare al unei piese pînă intră la prelucrat, precum și timpul mediu pe care o piesă îl petrece în secție.

Rezolvare. Modelul corespunzător problemei este un model cu un fir de așteptare, cu mai multe stații și populație infinită. Avem următoarele date:

$s = 3$ stații,

$\lambda = 10$ piese/oră,

$\mu = 6$ piese/oră.

a) $$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}\left(\frac{10}{6}\right)^n + \frac{6}{2!(3\cdot 6-10)}\left(\frac{10}{6}\right)^3} \approx 0{,}172 = 17{,}2\%.$$

b) Pentru a nu exista nici o piesă care să aştepte la un moment dat, trebuie ca în sistemul de aşteptare să existe nici una, una, două, sau trei piese în acel moment. Probabilitatea acestui eveniment este evident egală cu:

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + p_3.$$

Calculăm deci, folosind formulele corespunzătoare, valorile lui p_1, p_2 şi p_3:

$$p_1 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^1 \cdot 0{,}172 \approx 0{,}286,$$

$$p_2 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^3 \cdot 0{,}172 \approx 0{,}239,$$

$$p_3 = \frac{1}{3! \cdot 3^0} \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^3 \cdot 0{,}172 \approx 0{,}133.$$

Obţinem deci:

$$p = 0{,}172 + 0{,}286 + 0{,}239 + 0{,}133 = 0{,}83 = 83\%.$$

c) Numărul mediu de piese, ce aşteaptă să intre la prelucrare la un moment dat, este obţinut astfel:

$$n_f = \frac{10 \cdot 6}{2!(3 \cdot 6 - 10)^2} \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^3 \cdot 0{,}172 \approx 0{,}373 \text{ piese.}$$

Numărul mediu de piese neprelucrate, care există în sistemul de aşteptare la un moment dat, se calculează astfel:

$$\bar{n} = \bar{n}_f + \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}373 + \frac{10}{6} = 2{,}04 \text{ piese.}$$

d) Timpul mediu de aşteptare a unei piese în firul de aşteptare este următorul:

$$\bar{t}_f = \frac{6}{2!(3 \cdot 6 - 10)^2} \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^2 \cdot 0{,}172 \approx 0{,}0224 \text{ ore} \approx 1 \text{ min. şi } 20 \text{ secunde.}$$

De asemenea, timpul mediu de aşteptare a unei piese în sistemul de aşteptare este:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} \approx 0{,}189 \text{ ore} \approx 11 \text{ minute şi } 20 \text{ secunde.}$$

Problema 8. Pentru organizarea unor servicii publice complexe de aceeaşi natură, din diferite regiuni ale ţării, servicii pentru care sosirea cererilor este de natură poissoniană cu media $\lambda \leqslant 9$ unităţi/oră, se impune alegerea uneia dintre următoarele două variante:

— serviciul este asigurat de două brigăzi de salariaţi, fiecare brigadă putînd asigura servirea unei unităţi într-un timp cu distribuţie exponenţială, cu media $\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{5}$ ore;

— serviciul este asigurat de o singură brigadă, de două ori mai mare, care poate servi o unitate într-un timp cu o distribuţie exponenţială, cu media $\frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{10}$ ore.

Să se compare cele două variante de organizare a servirii, pentru diferite valori întregi ale parametrului λ, cu ajutorul indicatorilor: p_0, $\overline{n}_f$, $\overline{n}$, $\overline{t}_f$ și $\overline{t}_s$.

Rezolvare. Vom numi varianta 1 pe cea în care lucrează două brigăzi, iar varianta 2 pe cea în care serviciul este asigurat de o singură brigadă. În prima variantă vom aplica formulele de la modelul cu un fir de așteptare, mai multe stații, populație finită, cu următoarele date:

$$\lambda \in \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 9\},$$

$$\mu = \mu_1 = 5,\ s = 2.$$

În cea de a doua variantă, vom aplica formulele de la modelul cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, avînd următoarele date:

$$\lambda \in \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 9\},$$

$$\mu = \mu_2 = 10.$$

a) Considerînd drept criteriu de comparație valorile probabilității p_0, ca să nu existe nici o unitate în sistem la un moment dat, aplicăm pentru varianta 1 următoarea formulă:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\mu}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\lambda}{5}+\frac{5}{(10-\lambda)}\cdot\left(\frac{\lambda}{5}\right)^2},\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots, 9,$$

iar pentru varianta 2 formula:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{10},\ \lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9.$$

Obținem astfel rezultatele din tabelul IV.7, din care se vede că pentru toate valorile lui λ, în varianta 2 există șanse mai mari decît în varianta 1, ca să nu existe nici o unitate în sistem, la un moment dat. Diferența cea mai mare, dintre rezultatele corespunzătoare celor două variante, se găsește în dreptul valorii $\lambda=4$.

Tabelul IV.7

Varianta \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Varianta 1	0,818	0,667	0,538	0,428	0,333	0,25	0,177	0,111	0,053
Varianta 2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1

Scanned with OKEN Scanner

b) Considerînd drept criteriu de comparaţie valorile numărului mediu de unităţi, ce se găsesc la un moment dat în firul de aşteptare, folosim pentru varianta 1 formula:

$$\overline{n}_f = \frac{\lambda s\mu}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\cdot p_0 = \frac{5\lambda}{(10-\lambda)^2}\cdot\left(\frac{\lambda}{5}\right)^2\cdot p_0, \quad \lambda = 1,2,3,\ldots,9,$$

p_0 fiind dat de tabelul IV.7, iar pentru varianta 2 formula:

$$\overline{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2}{10(10-\lambda)}, \qquad \lambda = 1,2,3,\ldots,\ 9.$$

Tabelul IV.8

Varianta \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Varianta 1	0,002	0,017	0,06	0,152	0,333	0,675	1,35	2,84	7,727
Varianta 2	0,011	0,05	0,13	0,27	0,5	0,9	1,63	3,2	8,1

Se obţin astfel rezultatele din tabelul IV.8, din care se deduce că pentru toate valorile lui λ, $\overline{n}_f$ este mai mare în varianta 2.

c) Considerînd drept criteriu de comparaţie numărul mediu de unităţi ce se găsesc în sistemul de aşteptare la un moment dat, pentru varianta 1 vom folosi formula:

$$\overline{n} = \overline{n}_f + \frac{\lambda}{\mu} = \overline{n}_f + \frac{\lambda}{5}, \qquad \lambda = 1,2,3,\ldots,\ 9,$$

$\overline{n}_f$ fiind dat de tabelul IV.8, iar pentru varianta 2, formula:

$$\overline{n} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{10-\lambda}, \qquad \lambda = 1,2,3,\ldots,\ 9.$$

Cu aceste formule, se obţin rezultatele din tabelul IV.9, din care deducem că pentru toate valorile lui λ, există în medie mai puţine unităţi în sistem în varianta 2 decît în varanta 1.

Tabelul IV.9

Varianta \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Varianta 1	0,202	0,417	0,66	0,952	1,333	1,875	2,75	4,44	9,527
Varianta 2	0,111	0,25	0,43	0,67	1	1,5	2,33	4	9

Scanned with OKEN Scanner

d) Pentru timpul mediu de așteptare în fir, a unei unități, folosim în ambele variante formula următoare:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda}, \quad \lambda = 1,2,3,\ldots, 9,$$

valorile lui $\bar{n}_f$ fiind cele din tabelul IV.8. Obținem cu ajutorul acestei formule, rezultatele din tabelul IV.10, în care se vede că, pentru toate valorile lui λ, timpul mediu de așteptare în fir a unei unități este mai mare în varianta 2 decît în varianta 1.

Tabelul IV.10

Varianta \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Varianta 1	0,002	0,0085	0,02	0,038	0,067	0,113	0,19	0,35	0,858
Varianta 2	0,011	0,025	0,043	0,067	0,1	0,15	0,23	0,4	0,9

e) Calculăm timpul mediu de așteptare a unei unități în sistem cu ajutorul formulei:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu},$$

unde pentru varianta 1 se consideră $\mu = \mu_1 = 5$, iar pentru varianta 2 se consideră $\mu = \mu_2 = 10$. Rezultatele sînt conținute în tabelul IV.11, din care deducem că pentru toate valorile lui λ, timpul mediu de așteptare în sistem a unei unități este mai mic în varianta 2 decît în varianta 1.

Cercetînd cu atenție tabelele IV.7 — IV.11, deducem că, indiferent de intensitatea λ, este mai avantajoasă varianta 2, cu o singură brigadă de servire, deoarece atît numărul mediu de unități din întregul sistem cît și timpul mediu de așteptare a fiecărei unități în sistem sînt mai mici, comparativ cu valorile analoage din varianta 1. Deși în varianta cu două brigăzi de servire unitățile stau mai puțin în firul de așteptare, servirea propriu-zisă durează mai mult,

Tabelul IV.11

Varianta \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Varianta 1	0,402	0,2085	0,22	0,238	0,267	0,313	0,39	0,55	1,058
Varianta 2	0,111	0,125	0,143	0,167	0,2	0,25	0,33	0,5	1

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît această variantă este mai puțin avantajoasă. Se poate arăta că în general, pentru orice valori ale lui λ și μ, este avantajoasă o organizare a servirii cu ajutorul unei singure brigăzi mari, față de organizarea corespunzătoare cu mai multe brigăzi mici, dacă parametrul servirii este proporțional cu mărimea brigăzii.

Problema 9. Într-o întreprindere cu număr mare de muncitori, există două magazii de materiale, la care muncitorii întreprinderii sosesc în mod aleator în timpul zilei, pentru preluarea materialelor. Fiecare magazie este deservită de către un singur magazioner. Cercetări statistice au arătat că sosirile muncitorilor la fiecare dintre cele două magazii sînt de natură poissoniană, sosind în medie un muncitor la fiecare patru minute.

De asemenea, fiecare magazioner predă materialele necesare unui muncitor într-un timp ce are o distribuție exponențială, cu media de trei minute.

Se propune un nou sistem de distribuire a materialelor, cu o singură magazie, la care funcționează ambii magazioneri. Se consideră că sosirile muncitorilor, la această magazie unică, vor fi tot de natură poissoniană, sosind în medie un muncitor la fiecare două minute. În cadrul acestei propuneri, există două variante și anume:

— fiecare magazioner distribuie materiale la cîte un singur muncitor, cei doi magazioneri constituind deci stațiile de servire diferite, caz în care timpul de servire a fiecărui muncitor rămîne exponențial, cu media de trei minute (varianta 1);

— ambii magazioneri servesc același muncitor, constituind o singură stație de servire, caz în care se presupune că timpul de servire a fiecărui muncitor are o distribuție exponențială, cu media de 1,5 minute (varianta 2).

Pe de altă parte, se apreciază că prin cuplarea celor două magazii, jumătate dintre muncitorii ce sosesc la magazia unică de materiale pierd în medie, cu drumul, cu 11 minute mai mult decît în vechiul sistem de organizare a distribuirii de materiale (cu două magazii distincte).

Să se compare sistemul existent de organizare a distribuirii materialelor, cu cele două variante nou propuse, folosind indicatorii $\overline{n}_f$, $\overline{n}$, $\overline{t}_f$, $\overline{t}_s$ precum și cu ajutorul probabilității ca timpul de așteptare în fir să depășească cele zece minute.

Rezolvare. Fenomenul de așteptare, corespunzător sistemului existent de organizare a distribuirii materialelor, poate fi cercetat cu ajutorul modelului cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, model ce trebuie aplicat la fiecare magazie în parte. Pentru o magazie, avem următoarele date:

$$\lambda = \frac{1}{4} \text{ muncitori/minut} = 15 \text{ muncitori/oră},$$

$$\mu = \frac{1}{3} \text{ muncitori/minut} = 20 \text{ muncitori/oră}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formulele corespunzătoare modelului menţionat, obţinem următoarele valori ale indicatorilor ceruţi.

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{15^2}{20\,(20-15)} = 2{,}25 \text{ muncitori},$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{15}{20-15} = 3 \text{ muncitori},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{15}{20\,(20-15)} = 0{,}15 \text{ ore} = 9 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{20-15} = 0{,}2 \text{ ore} = 12 \text{ minute},$$

$$P\left(t_f > \frac{1}{6}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot\frac{1}{6}} = \frac{15}{20}\, e^{-(20-15)\cdot\frac{1}{6}} = 0{,}75 \cdot e^{-\frac{5}{6}} \approx 0{,}326.$$

Deoarece valorile obţinute pentru indicatorii ceruţi se repetă la cea de a doua magazie, vom considera că numărul muncitorilor ce aşteaptă în fir, respectiv în sistem, se dublează faţă de valorile găsite.

În cazul unei magazii unice şi cu cei doi magazioneri distribuind materiale în mod separat (varianta 1), fenomenul de aşteptare general poate fi cercetat cu ajutorul modelului cu un fir de aşteptare, mai multe staţii de servire, populaţie infinită, în care avem următoarele date:

$s = 2$ staţii,

$\lambda = \frac{1}{2}$ muncitori/minut $= 30$ muncitori/oră,

$\mu = \frac{1}{3}$ muncitori/minut $= 20$ muncitori/oră.

Folosind formulele corespunzătoare acestui model, obţinem succesiv:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\mu}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}+\frac{20}{1!\,(2\cdot 20-30)}\cdot\left(\frac{30}{20}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{7} \approx 0{,}143,$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda\cdot\mu}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot p_0 = \frac{30\cdot 20}{1!\,(2\cdot 20-30)^2} \cdot \left(\frac{30}{20}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{27}{14} \approx 1{,}93 \text{ muncitori},$$

$$\bar{n} = \bar{n}_f + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{27}{14} + \frac{30}{20} \approx 3{,}43 \text{ muncitori},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{27}{14} \cdot \frac{1}{30} \approx 0{,}065 \text{ ore} \approx 3{,}9 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} \approx 0{,}065 + \frac{1}{20} = 0{,}115 \text{ ore} \approx 6{,}9 \text{ minute},$$

$$P\left(\bar{t}_f > \frac{1}{6}\right) = p_2 \cdot \frac{s}{s-\rho} \cdot e^{-(s\mu-\lambda)\frac{1}{6}} = \frac{1}{2!}\left(\frac{30}{20}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{2-\frac{30}{20}} \cdot e^{-(2\cdot 20-30)\frac{1}{6}} \approx 0{,}122.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, în cazul magaziei unice și cu cei doi magazioneri distribuind materiale aceluiași muncitor (varianta 2), fenomenul de așteptare generat poate fi cercetat cu ajutorul modelului cu un fir de așteptare, o singură stație, populație infinită, în care avem:

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ muncitori/minut} = 30 \text{ muncitori/oră},$$

$$\mu = \frac{1}{1{,}5} \text{ muncitori/minut} = 40 \text{ muncitori/oră}.$$

Aplicînd formulele corespunzătoare acestui model, obținem:

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30^2}{40\,(40 - 30)} = 2{,}25 \text{ muncitori},$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{40 - 30} = 3 \text{ muncitori},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30}{40\,(40 - 30)} = 0{,}075 \text{ ore} = 4{,}5 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{40 - 30} = 0{,}1 \text{ ore} = 6 \text{ minute},$$

$$P\left(\bar{t}_f > \frac{1}{6}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot e^{-(\mu-\lambda)\frac{1}{6}} = \frac{30}{40} e^{-(40-30)\frac{1}{6}} \approx 0{,}142.$$

Toate valorile obținute, pentru cele trei sisteme de organizare, sînt trecute în tabelul IV. 12. Dacă nu ținem seama de timpul suplimentar, pierdut de jumătate din muncitorii ce au nevoie de materiale, cu drumul spre magazia unică,

Tabelul IV.12

Indicatorul / Sistemul	$\bar{n}_f$	$\bar{n}$	$\bar{t}_f$	$\bar{t}_s$	$P\left(\bar{t}_f > \frac{1}{6}\right)$
Sistemul existent	2,25 + 2,25	3 + 3	9	12	32,6%
Sistemul propus (varianta 1)	1,93	3,43	3,9	6,9	12,2%
Sistemul propus (varianta 2)	2,25	3	4,5	6	14.2%

rezultă clar din acest tabel avantajul noului sistem de distribuire a materialelor, față de cel vechi. Ținînd seama însă de faptul că timpul mediu suplimentar, pierdut cu drumul fiecărui muncitor, în noul sistem de organizare, poate fi considerat egal cu 5,5 minute (în medie unul din doi muncitori pierde 11 minute), timp pe care trebuie să îl adăugăm la timpul mediu petrecut în sistemul de așteptare, numai în cazul sistemului propus, rezultă următoarele:

— Varianta 1 a sistemului propus face ca fiecare muncitor ce are nevoie de materiale să piardă cu preluarea lor în medie 12,4 minute, mai mult decît în vechiul sistem de organizare (cu două magazii).

Scanned with OKEN Scanner

— Varianta 2 a sistemului propus face ca fiecare muncitor să piardă pentru preluarea materialelor în medie 11,5 minute, ceea ce înseamnă un uşor avantaj asupra vechiului sistem.

Problema 10. Se preconizează construirea unei staţii PECO la ieşirea dintr-un oraş, staţie pentru care trebuie dimensionat spaţiul de aşteptare a maşinilor, ce vor sosi să se aprovizioneze cu benzină. După efectuarea unor cercetări comparative, se estimează că la această staţie maşinile vor sosi aleator, cu distribuţie poissoniană, sosind în medie 15 maşini pe oră, pînă cînd spaţiul de aşteptare nu mai permite, caz în care clienţii nou sosiţi pleacă la altă staţie. Staţia va fi deservită de un singur vînzător.

Prin comparare cu alte staţii de aceeaşi natură, s-a presupus că timpul de servire a unui client are o distribuţie exponenţială, cu media de 1,5 minute.

a) Să se determine proporţia de clienţi pierduţi, din cauza spaţiului neadecvat, în cazul în care se lasă pentru aşteptare un spaţiu în care intră mai puţin de şase maşini. Să se arate apoi cum trebuie dimensionat spaţiul de aşteptare, astfel încît să nu se piardă mai mult de 5% din clienţii ce încearcă să alimenteze maşinile la staţia ce se construieşte.

b) Pentru spaţiul minim de aşteptare, determinat cu condiţia de la punctul precedent, să se calculeze indicatorii ataşaţi fenomenului de aşteptare generat, precum şi probabilitatea ca o maşină să aştepte în fir mai mult de două minute. Să se compare rezultatele obţinute cu cele corespunzătoare unui fir de aşteptare nemărginit.

c) Cum se modifică indicatorii anteriori, dacă staţia va fi servită de doi vînzători, constituind două staţii de servire distincte?

Rezolvare. a) Modelul pe care îl folosim este un model cu fir de aşteptare, o staţie, populaţie infinită, firul de aşteptare fiind mărginit, cu număr de locuri $N < 6$. Avem:

$$\lambda = 15 \text{ maşini/oră},$$

$$\mu = \frac{1}{1,5} \text{ maşini/minut} = 40 \text{ maşini/oră},$$

deci:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}.$$

Proporţia de clienţi pierduţi este dată de probabilitatea ca în sistemul de aşteptare să fie completate toate cele $N+1$ locuri (una în staţia de servire şi N în firul de aşteptare), care se calculează cu următoarea formulă:

$$p_{N+1} = \rho^{N+1} \cdot \frac{s - \rho}{s - \rho^{N+2}}.$$

Aplicînd această formulă pentru valorile $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, se obţin rezultatele din tabelul IV.13. Se observă din acest tabel că probabilitatea cerută scade sub 5%, pentru $N \geqslant 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV-13

N	p_{N+1}
0	0,273
1	0,093
2	0,0336
3	0,0125
4	0,00465
5	0,00174

b) Considerăm, conform cerințelor problemei, că spațiul de așteptare este asigurat numai pentru două mașini:

$$N = 2.$$

Pentru calculul indicatorilor $\bar{n}$ și $\bar{n}_f$, se pot folosi formulele generale prezentate în § 1. În cazul de față, calculul este mai ușor de făcut prin folosirea directă a probabilităților p_n, $n = 0, 1, \ldots, N+1$. Pentru determinarea acestor probabilități, avem următoarele calcule:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} = \frac{1-\frac{3}{8}}{1-\left(\frac{3}{8}\right)^4} \approx 0{,}6376,$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0 \approx \frac{3}{8} \cdot 0{,}6376 \approx 0{,}2391,$$

$$p_2 = \rho^2 \cdot p_0 \approx \frac{3}{8} \cdot 0{,}2391 \approx 0{,}0897,$$

$$p_3 = \rho^3 \cdot p_0 \approx \frac{3}{8} \cdot 0{,}0897 \approx 0{,}0336.$$

Se verifică ușor că:

$$\sum_{n=0}^{3} p_n = 1.$$

Vom avea deci, conform definițiilor,

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{3} n \cdot p_n = 1 \cdot 0{,}2391 + 2 \cdot 0{,}0897 + 3 \cdot 0{,}0336 = 0{,}5193 \text{ mașini},$$

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{2} n \cdot p_{n+1} = 1 \cdot 0{,}0897 + 2 \cdot 0{,}0336 = 0{,}1569 \text{ mașini}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Numărul mediu de stații ocupate la un moment dat este:

$$\bar{n}_s = \sum_{n=0}^{3} p_n = 1 - p_0 = 1 - 0{,}6376 = 0{,}3624 \text{ stații},$$

astfel încît timpul mediu de așteptare în fir a unei mașini este:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\mu \cdot \bar{n}_s} = \frac{0{,}1569}{40 \cdot 0{,}3624} \approx 0{,}0108 \text{ ore} \approx 0{,}65 \text{ minute}.$$

Timpul mediu de așteptare a unei mașini în întregul sistem va fi deci:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} = 0{,}0108 + \frac{1}{40} = 0{,}0358 \text{ ore} \approx 2{,}15 \text{ minute}.$$

În sfîrșit, probabilitatea ca o mașină să aștepte în fir mai mult de două minute se calculează cu formula corespunzătoare, conducînd la următorul rezultat:

$$P\left(t_f > \frac{1}{30}\right) = \frac{360}{803} \cdot e^{-\frac{4}{3}} \approx 0{,}118.$$

Calculînd valorile aceloraşi indicatori, în cazul modelului analog celui de mai sus, dar cu firul de așteptare nemărginit, se obțin valorile din tabelul IV.14, puse în corespondență cu rezultatele calculate anterior. Valorile mai mari, ale indicatorilor $\bar{n}$, $\bar{n}_f$, $\bar{t}_f$, $\bar{t}_s$, $P\left(\bar{t}_f > \frac{1}{30}\right)$, în cazul $N = \infty$, sînt ușor de explicat intuitiv, diferențele datorîndu-se pierderilor de eventuali clienți.

Tabelul IV.14

Model / Indicator	$N = 2$	$N = \infty$
$\bar{n}$	0,5193	0,5
$\bar{n}_f$	0,1569	0,225
$\bar{t}_f$	0,65 minute	0,9 minute
$\bar{t}_s$	2,15 minute	2,4 minute
$P\left(\bar{t}_f > \frac{1}{30}\right)$	11,8%	16,3%

c) În cazul a două stații de servire, valorile indicatorilor se pot calcula cu formulele corespunzătoare modelului cu un fir de așteptare, mai multe stații, populație infinită și fir de așteptare mărginit. Avem deci în plus:

$$s = 2, \quad N = 2.$$

Preferăm însă, ca mai sus, să calculăm mai întîi probabilitățile p_n

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N + s.$$

Scanned with OKEN Scanner

Obținem:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\rho}{s}\right)^k} = \frac{1}{1 + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} + \frac{9}{2 \cdot 64}\left(\frac{3}{16} + \frac{9}{256}\right)} \approx 0{,}6845,$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = \frac{3}{8} \cdot 0{,}6845 \approx 0{,}2567,$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2} \cdot p_0 = \frac{3}{16} \cdot 0{,}2567 \approx 0{,}0480,$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{s!\, s^{3-s}} \cdot p_0 \approx 0{,}009,$$

$$p_4 = \frac{\rho^4}{s!\, s^{4-s}} \cdot p_0 \approx 0{,}0018.$$

Vom avea deci:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{4} n \cdot p_n = 1 \cdot 0{,}256 + 2 \cdot 0{,}048 + 3 \cdot 0{,}009 + 4 \cdot 0{,}0018 = 0{,}3869 \text{ mașini},$$

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{2} n \cdot p_{n+2} = 1 \cdot 0{,}009 + 2 \cdot 0{,}0018 = 0{,}0126 \text{ mașini}.$$

Pe de altă parte, numărul mediu de stații ocupate la un moment dat este:

$$\bar{n}_s = p_1 + 2\,(p_2 + p_3 + p_4) = 0{,}3743,$$

deci:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\mu \cdot \bar{n}_s} = \frac{0{,}0126}{40 \cdot 0{,}3743} \approx 0{,}00084 \text{ ore} = 0{,}05 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{40} \approx 0{,}025584 \text{ ore} \approx 1{,}55 \text{ minute}.$$

În sfîrșit, folosind valoarea $\rho^* = \frac{\rho}{s} = \frac{3}{16}$ obținem:

$$P\left(t_f > \frac{1}{30}\right) = \frac{p_s}{(1-\rho^*)^2} e^{-s\mu \cdot \frac{1}{30}} \cdot [1 - (N+1)\rho^{*N} + N\rho^{*N+1}] \approx 0{,}0046.$$

Din rezultatele obținute, deducem că acest mod de organizare a servirii este extrem de avantajos pentru clienți, dar evident puțin avantajos pentru organizatori, trebuind salarizați doi vînzători.

După cum se vede, numărul mediu de stații ocupate ($\bar{n}_s = 0{,}3743$) este mic în raport cu numărul stațiilor existente ($s = 2$), ceea ce înseamnă că timpul mediu de inactivitate al celor doi vînzători este mare și anume:

$$\bar{t}_i = s - \bar{n}_s = 2 - 0{,}3743 = 1{,}6257.$$

Cu alte cuvinte, în decurs de o oră, în care cele două stații ar fi putut folosi două ore de lucru efectiv, se lucrează în medie numai 0,3743 ore, adică în proporție de:

$$\frac{0{,}3743}{2} \approx 0{,}187 = 18{,}7\%,$$

Scanned with OKEN Scanner

restul timpului stațiile fiind în inactivitate. Comparînd cu cazul în care serviciul este organizat de un singur vînzător, ce lucrează efectiv 36,24% din timp, rezultă avantajul primului sistem de organizare, în care ceilalți parametrii ai modelului sînt acceptabili și din punctul de vedere al clienților nu există o așteptare prea mare.

Problema 11. Un mecanic de întreținere repară mașinile ce se defectează, din lotul ce conține 20 mașini de un anumit tip, al unei întreprinderi. Mașinile se defectează aleator, timpul de funcționare a fiecărei mașini, între două defectări succesive, avînd o distribuție exponențială, cu media de 50 zile (se consideră toate mașinile cu același grad de uzură). De asemenea, mecanicul poate repara o mașină într-un interval de timp ce urmează o distribuție exponențială, putînd repara în medie două mașini pe zi (opt ore de lucru).

a) Să se cerceteze fenomenul de așteptare a mașinilor defectate, ce are loc în întreprinderea respectivă, determinînd probabilitatea de inactivitate a mecanicului, precum și indicatorii $\bar{n}$, $\bar{n}_f$, $\bar{t}_f$, și $\bar{t}_s$.

b) Să se cerceteze același fenomen, prin aproximare, considerînd volumul populației (sursei) infinit și să se compare rezultatele cu cele anterioare.

c) Să se refacă comparația calculului corect cu unul aproximativ în cazul în care considerăm numai cinci mașini în lotul repartizat mecanicului, celelalte date rămînînd neschimbate.

Rezolvare. a) Modelul matematic de așteptare, pe care îl vom folosi, este cu un fir, o stație, populație finită, cu următoarele valori ale parametrilor:

$$\lambda = \frac{1}{50} \text{ mașini/zi},$$

$$\mu = 2 \text{ mașini/zi},$$

$$m = 20.$$

Avem în plus:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{100}.$$

Aplicînd formulele corespunzătoare modelului menționat, obținem succesiv, ținînd seama că mecanicul este inactiv cînd nici o mașină din lot nu este defectă:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} A_m^n \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{20} A_{20}^n \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n} \approx \frac{1}{1{,}24622} \approx 0{,}8024,$$

$$\bar{n}_f = m - \frac{\mu+\lambda}{\lambda}(1-p_0) = 20 - \frac{2+\frac{1}{50}}{\frac{1}{50}} \cdot (1-0{,}8024) \approx 0{,}0424 \text{ mașini},$$

$$\bar{n} = m - \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) = 20 - 100(1-0{,}8024) \approx 0{,}24 \text{ mașini},$$

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\mu}\left(\frac{m}{1-p_0} + \frac{\mu+\lambda}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{1-0{,}8024} + \frac{2+\frac{1}{50}}{\frac{1}{50}}\right) \approx 0{,}107 \text{ zile} = 0{,}856 \text{ ore},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} = 0{,}107 - \frac{1}{2} = 0{,}607 \text{ zile} = 4{,}856 \text{ ore}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Considerînd $m=0$, vom aplica formulele corespunzătoare modelului cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, în care vom lua drept parametru al sosirilor pe:

$$\lambda' = m \cdot \lambda = 20 \cdot \frac{1}{50} = \frac{2}{5} \text{ mașini/oră}$$

(vechiul λ era parametrul sosirilor pentru fiecare mașină din lot). Vom avea deci succesiv:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda'}{\mu} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8,$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda'^2}{\mu(\mu - \lambda')} = \frac{\frac{4}{25}}{2(2 - 2/5)} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ mașini},$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda'}{\mu - \lambda'} = \frac{2/5}{2 - 2/5} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ mașini},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda'}{\mu(\mu - \lambda')} = \frac{2/5}{2(2 - 2/5)} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \text{ zile} = 1 \text{ oră},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} = 0{,}125 + \frac{1}{2} = 0{,}625 \text{ zile} = 5 \text{ ore}.$$

Rezultatele aproximative obținute, considerînd $m=\infty$, sînt trecute în tabelul IV.15, în care sînt trecute și rezultatele corecte, obținute la punctul precedent, pentru comparare. Se observă că diferențele dintre rezultatele aproximative și cele corecte (în valoare absolută) nu sînt prea mari. Evident că, cu cît valoarea lui m este mai mare (teoretic $m \to \infty$), rezultatele aproximative vor fi mai apropiate de cele corecte, cu condiția ca $\lambda' = m\lambda$ să fie destul de mic în raport cu μ.

Tabelul IV.15

Indicator \ Model	$m = 20$	$m = \infty$	Diferența
p_0	0,8024	0,8	0,0024
$\bar{n}_f$	0,0424	0,05	0,0076
$\bar{n}$	0,24	0,25	0,01
$\bar{t}_f$	0,856 ore	1 oră	0,144 ore
$\bar{t}_s$	4,856 ore	5 ore	0,144 ore

c) Refăcînd toate calculele de mai sus, în cazul modelelor analoage celor folosite, dar cu $m=5$, se obțin rezultatele din tabelul IV.16, în care $\bar{t}_f$ și $\bar{t}_s$ sînt

Scanned with OKEN Scanner

măsurate în zile. După cum se vede din acest tabel, diferențele dintre rezultatele aproximative și cele corecte (în valoare absolută) sînt de această dată destul de mari, datorită volumului redus al populației.

Tabelul IV.16

Indicator / Model	$m = 5$	$m = \infty$	Diferența
p_0	0,9515	0,95	0,0015
$\bar{n}_f$	0,1014	0,0026	0,0988
$\bar{n}$	0,15	0,05	0,10
$\bar{t}_f$	1,05	0,026	1,024
$\bar{t}_s$	1,55	0,526	1,024

Problema 12. Pe un șantier de construcții-montaj, în cadrul lucrărilor de betonare, se găsesc nouă vibratoare, care sînt întreținute de patru electricieni. S-a constatat că durata medie de funcționare a unui vibrator, fără nici o defecțiune, este de cinci ore, iar durata medie pentru înlăturarea unei defecțiuni este de două ore.

În urma unor cercetări întreprinse în cadrul întreprinderii, s-a stabilit că legea de distribuție a numărului de vibratori ce se defectează într-o oră este de natură poissoniană, iar legea de distribuție a timpului necesar înlăturării unei defecțiuni este exponențială.

Să se determine:

a) probabilitatea ca la locul de muncă respectiv să nu existe nici un vibrator defect la un moment dat;

b) probabilitatea ca nici un vibrator defect să nu aștepte pentru a fi reparat, el intrînd direct în reparație;

c) numărul mediu de vibratoare care așteaptă să fie reparate, precum și numărul mediu de vibratoare care sînt defecte pe șantier, la un moment dat;

d) timpul mediu de așteptare în fir, respectiv în sistemul de așteptare.

Rezolvare. Fenomenul de așteptare generat în problemă corespunde unui model cu un fir de așteptare, mai multe stații și populație finită. Avem următoarele date:

$$s = 4 \text{ stații},$$

$$m = 9 \text{ vibratoare},$$

$$\lambda = \frac{1}{5} \text{ vibratoare/oră},$$

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ vibratoare/oră}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosim deci valoarea:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

a) Probabilitatea ca să nu existe nici un vibrator defect, la un moment dat, se calculează astfel:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} C_9^n \cdot 0{,}4^n + \frac{4^4}{4!} \sum_{n=4}^{9} A_9^n \cdot \left(\frac{0{,}4}{4}\right)^n} \approx 0{,}047 = 4{,}7\%.$$

b) Pentru ca nici un vibrator să nu fie în firul de așteptare, trebuie ca în sistemul de așteptare să existe nici un vibrator, unul, două, trei, sau patru. Probabilitatea acestui eveniment este deci:

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4.$$

Avem, folosind formula ce dă valoarea lui p_n:

$$p_1 = C_9^1 (0{,}4)^1 \cdot 0{,}047 \approx 0{,}170,$$

$$p_2 = C_9^2 (0{,}4)^2 \cdot 0{,}047 \approx 0{,}271,$$

$$p_3 = C_9^3 (0{,}4)^3 \cdot 0{,}047 \approx 0{,}253,$$

$$p_4 = \frac{4^4}{4} A_9^4 \left(\frac{0{,}4}{4}\right)^4 \cdot 0{,}047 \approx 0{,}152.$$

Obținem deci probabilitatea cerută:

$$p = 0{,}047 + 0{,}170 + 0{,}271 + 0{,}253 + 0{,}152 = 0{,}893 = 89{,}3\%.$$

c) Numărul mediu de vibratoare ce așteaptă la un moment dat pentru a fi reparate se calculează astfel:

$$\bar{n}_f = \left(9 - \frac{4}{0{,}4} - 4\right)\left[1 - 0{,}047 \cdot \sum_{n=0}^{3} C_9^n \cdot (0{,}4)^n\right] + 4 \cdot (0{,}4)^3 \cdot C_9^4 \cdot$$

$$\cdot\, 0{,}047 \approx 0{,}214 \text{ vibratoare.}$$

Numărul mediu de vibratoare ce există în sistemul de așteptare la un moment dat este:

$$\bar{n} = 0{,}047 \left[\frac{4 \cdot 0{,}4 + 4 - 9 \cdot 0{,}4}{0{,}4\,(1 + 0{,}4)} \sum_{n=0}^{3} C_9^n (0{,}4)^n + \frac{4\,(0{,}4)^3\, C_9^4}{1 + 0{,}4}\right] \frac{9 \cdot 0{,}4 - 4}{0{,}4} \approx$$

$$\approx 2{,}723 \text{ vibratoare.}$$

d) Calculăm mai întîi mărimea:

$$\bar{n}_s = \bar{n} - \bar{n}_f = 2{,}509.$$

Avem deci:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\mu \cdot \bar{n}_s} \approx 0{,}0175 \text{ ore} = 1 \text{ minut și } 3 \text{ secunde},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} \approx 2 \text{ ore } 1 \text{ minut și } 3 \text{ secunde}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 13. Sosirea pieselor la o mașină pentru prelucrare este de natură poissoniană, sosind în medie 24 piese pe oră. Operația de prelucrare poate fi efectuată de patru mașini, notate cu M_1, M_2, M_3 și M_4, ce se deosebesc prin natura distribuției timpului necesar prelucrării unei piese și anume:

— mașina M_1 poate efectua operația de prelucrare a unei piese într-un timp ce are o distribuție exponențială;

— mașina M_2 poate efectua operația de prelucrare a unei piese într-un timp ce are o distribuție normală, avînd abaterea medie pătratică numeric egală cu valoarea medie;

— mașina M_3 poate efectua operația de prelucrare a unei piese într-un timp cu distribuție uniformă, luînd valori pe intervalul [1, 3];

— mașina M_4 lucrează automat, realizînd un timp constant de prelucrare a unei piese.

Cercetările au arătat că valoarea medie a timpului de prelucrare a unei piese de către fiecare mașină este aceeași, fiind egală cu două minute.

Să se calculeze indicatorii atașați fenomenelor de așteptare ce iau naștere în cazul cînd operația de prelucrare se efectuează cu fiecare mașină în parte, făcîndu-se o comparație între aceste posibilități. Să se deducă din această comparație care dintre cele patru mașini este mai indicată să efectueze operația de prelucrare respectivă, astfel încît să fie ocupat un spațiu cît mai mic de așteptare.

Rezolvare. Pentru determinarea indicatorilor ceruți, vom folosi formulele corespunzătoare fenomenelor de așteptare cu sosiri poissoniene și lege de distribuție a timpului de servire oarecare, în sistem funcționînd o singură stație de servire. În toate cele patru cazuri, avem, conform problemei:

$$\lambda = 24 \text{ piese/oră} = \frac{2}{5} \text{ piese/minut},$$

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ piese/minut},$$

deci:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5}.$$

În toate cazurile cercetate, vom avea următoarea probabilitate de a nu exista nici o piesă în sistemul de așteptare la un moment dat:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{4}{5} = 0{,}2 = 20\%,$$

această probabilitate indicînd, de fapt, că 80% din timpul unei zile mașina lucrează efectiv și 20% din acest timp mașina este în inactivitate. De asemenea, numărul mediu de stații ocupate este egal cu:

$$\overline{n}_s = \rho = \frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%,$$

indicator care exprimă același lucru ca mai sus.

Indicatorii ce urmează depind de natura distribuției timpului de servire a unei unități, astfel încît vom cerceta fiecare caz în parte.

Scanned with OKEN Scanner

a) În cazul mașinii M_1, putem folosi formulele menționate mai sus, înlocuind pe σ^2 prin dispersia distribuției exponențiale de medie $\frac{1}{\mu}$ și anume:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{\mu^2} = 4.$$

Putem însă folosi direct formulele de la modelul cu sosiri poissoniene, timp de servire exponențial, cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, cu ajutorul cărora obținem:

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = 4 \text{ piese},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 3{,}2 \text{ piese},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 8 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 10 \text{ minute}.$$

b) Pentru mașina M_2, timpul de prelucrare a unei piese are o distribuție normală, cu media și abaterea medie pătratică ce urmează:

$$m = 2 \text{ minute}, \qquad \sigma_2 = 2 \text{ minute}.$$

Înlocuind în formulele generale, corespunzătoare unui timp de servire oarecare, obținem:

$$\bar{n} = \frac{2\rho - \rho^2 + \lambda^2\sigma_2^2}{2(1-\rho)} = \frac{2 \cdot {}^4/_5 - {}^{16}/_{25} + {}^4/_5 \cdot 2^2}{2(1 - {}^4/_5)} = 4 \text{ piese},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_2^2}{2(1-\rho)} = 3{,}2 \text{ piese},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_2^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = 8 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} = 10 \text{ minute}.$$

După cum se vede, s-au obținut rezultate identice cu cele din cazul unei distribuții exponențiale a timpului de servire, deoarece cele două distribuții (normală, respectiv exponențială) au arătat valori egale pentru medie și dispersie.

c) Pentru mașina M_3, timpul de servire a unei unități fiind uniform pe intervalul $[1; 3]$, calculăm dispersia cu ajutorul formulei cunoscute:

$$\sigma_3^2 = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

(reamintim că în cazul unei distribuții uniforme pe intervalul $[a, b]$, dispersia este egală cu $\frac{(b-a)^2}{12}$).

Scanned with OKEN Scanner

Obținem deci, aplicînd formulele generale de mai sus,

$$\bar{n} = 2{,}53 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_f = 4{,}33 \text{ minute},$$
$$\bar{n}_f = 1{,}73 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_s = 6{,}33 \text{ minute}.$$

d) Pentru mașina M_4, dispersia timpului de servire a unei unități este nulă:

$$\sigma_4^2 = 0,$$

ceea ce conduce, după înlocuire, la următoarele valori:

$$\bar{n} = 2{,}4 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_f = 4 \text{ minute},$$
$$\bar{n}_f = 1{,}6 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_s = 6 \text{ minute}.$$

Valorile obținute în cele patru cazuri sînt trecute pentru comparație în tabelul IV.17, din care se vede că cea mai indicată pentru efectuarea operației de prelucrare este mașina automată M_4.

Tabelul IV.17

Indicator \ Distribuție	Exponențială (M_1)	Normală (M_2)	Uniformă (M_3)	Constantă (M_4)
$\bar{n}$	4	4	2,53	2,4
$\bar{n}_f$	3,2	3,2	1,73	1,6
$\bar{t}_f$	8	8	4,33	4
$\bar{t}_s$	10	10	6,33	6

Observăm că, în acest caz, atît numărul mediu de piese ce se găsesc în firul de așteptare la un moment dat, cît și timpul mediu de așteptare a unei piese în fir, sînt egale cu jumătate din valorile corespunzătoare din cazul în care prelucrarea este făcută cu mașinile M_1 sau M_2. De asemenea, numărul mediu de piese ce se găsesc în sistemul de așteptare la un moment dat, precum și timpul mediu de așteptare a unei piese în sistem, sînt mai mici decît valorile corespunzătoare din cazul folosirii mașinilor M_1 și M_2. Se vede de asemenea că lucrul cu mașina M_4 are un ușor avantaj și asupra lucrului cu mașina M_3, indicatorii respectivi fiind mai mici față de cazul cînd ar lucra mașina M_3.

Problema 14. O mașină poate efectua patru operații de prelucrare asupra unor piese, operații pe care le notăm cu O_1, O_2, O_3 și O_4. S-a observat că timpul de efectuare a fiecărei operații asupra unei piese are o distribuție ce depinde de operația respectivă și anume:

— timpul de efectuare a operației O_1 asupra unei piese are o distribuție exponențială cu media de cinci minute;

— timpul de efectuare a operației O_2 asupra unei piese are o distribuție normală cu media de patru minute și o abatere medie pătratică de 1,41 minute;

— timpul de efectuare a operației O_3 asupra unei piese are o distribuție uniformă, putînd lua valori în intervalul [4;6];

Scanned with OKEN Scanner

— timpul de efectuare a operației O_4 asupra unei piese este constant egal cu șase minute.

Considerînd că sosirea pieselor la mașină, pentru prelucrare, este de fiecare dată de natură poissoniană, sosind în medie șase piese pe oră, să se calculeze indicatorii atașați fenomenelor de așteptare generate în cele patru cazuri, în care mașina este pusă să efectueze fiecare operație în parte, să se facă o comparație între aceste posibilități în ceea ce privește următoarele caracteristici:

— proporția din timpul unei zile, cît mașina lucrează efectiv,

— folosirea unui spațiu mediu de așteptare cît mai mic.

Rezolvare. Conform datelor problemei, în toate cele patru cazuri avem sosiri poissoniene, cu parametrul:

$$\lambda = 6 \text{ piese/oră} = \frac{1}{10} \text{ piese/minut.}$$

Pentru calculul indicatorilor, cercetăm fiecare caz în parte.

a) Pentru aplicarea operației O_1, distribuția timpului de prelucrare a unei piese este exponențială, cu parametrul:

$$\mu_1 = \frac{1}{5} \text{ piese/minut,}$$

deci:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{1}{2}.$$

Aplicînd formulele de calcul de la modelul cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, în cazul timpului de servire exponențial, obținem:

$$\bar{n}_s = \rho_1 = 0{,}5 = 50\%, \qquad \bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu_1(\mu_1 - \lambda)} = 5 \text{ minute,}$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} = 1 \text{ piesă,} \qquad \bar{t}_s = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = 10 \text{ minute.}$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1 - \lambda)} = 0{,}5 \text{ piese,}$$

b) Pentru aplicarea operației O_2, distribuția timpului de prelucrare a unei piese este normală, avînd media și dispersia de mai jos:

$$m_2 = \frac{1}{\mu_2} = 4 \text{ minute,}$$

$$\sigma_2^2 = 1{,}41^2 = 2 \text{ minute.}$$

Rezultă că:

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \text{ piese/minut,}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formulele generale ale indicatorilor, din cazul unei distribuții oarecare a timpului de servire a unei unități, obținem:

$$\bar{n}_s = \rho_2 = \frac{2}{5} = 40\%, \qquad \bar{t}_f = 1{,}5 \text{ minute},$$

$$\bar{n} = 0{,}55 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_s = 5{,}5 \text{ minute}.$$

$$\bar{n}_f = 0{,}15 \text{ piese},$$

c) Pentru aplicarea operației O_3, distribuția timpului de prelucrare a unei piese fiind uniformă pe intervalul [4; 6], ea va avea media și dispersia de mai jos:

$$m_3 = \frac{1}{\mu_3} = \frac{6+4}{2} = 5 \text{ minute};$$

$$\sigma_3^2 = \frac{(6-4)^2}{12} = \frac{1}{3} \text{ minute}^2.$$

Rezultă că:

$$\mu_3 = \frac{1}{5} \text{ piese/minut},$$

deci:

$$\rho_3 = \frac{\lambda}{\mu_3} = \frac{1}{2}.$$

Aplicînd aceleași formule ca mai sus, obținem:

$$\bar{n}_s = \rho_3 = 50\%, \qquad \bar{t}_f = 2{,}53 \text{ minute},$$

$$\bar{n} = 0{,}753 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_s = 7{,}53 \text{ minute}.$$

$$\bar{n}_f = 0{,}253 \text{ piese},$$

d) Pentru aplicarea operației O_4, timpul de prelucrare a oricărei piese este același, avînd:

$$\mu_4 = \frac{1}{6} \text{ piese/minut},$$

$$\sigma_4^2 = 0.$$

Avem deci:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_4} = \frac{3}{5}.$$

Aplicarea formulelor conduce la următoarele rezultate în acest caz:

$$\bar{n}_s = \rho_4 = 60\%, \qquad \bar{t}_f = 4{,}5 \text{ minute},$$

$$\bar{n} = 1{,}05 \text{ piese}, \qquad \bar{t}_s = 10{,}5 \text{ minute}.$$

$$\bar{n}_f = 0{,}45 \text{ piese}$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparînd cele patru rînduri de rezultate, rezultă următoarele:

— cea mai mică proporție de timp (40%), în care mașina este folosită efectiv în timpul unei zile, corespunde operației O_2,

— cele mai mici timpuri medii de așteptare, respectiv numere medii de piese ce așteaptă, corespund de asemenea operației O_2.

Din aceste observații rezultă că este avantajos ca mașina în cauză să fie folosită pentru efectuarea operației O_2 de prelucrare.

Problema 15. Un anumit serviciu public este realizat printr-un singur funcționar. Făcînd anumite sondaje, s-a ajuns la concluzia că funcționarul se grăbește pe măsură ce numărul persoanelor din sistemul de așteptare crește. Mai mult, s-a estimat că timpul mediu de servire a unei persoane urmează întotdeauna o distribuție exponențială, însă numărul mediu de persoane servite într-o oră variază, el fiind de 32 persoane atunci cînd nu așteaptă nimeni în fir și de 40 persoane atunci cînd în sistemul de așteptare există 30 persoane. Se știe de asemenea că sosirile persoanelor în sistemul de așteptare sînt de natură poissoniană, sosind în medie 30 persoane pe oră.

Să se determine indicatorii fenomenului de așteptare descris și să se compare cu indicatorii corespunzători cazului cînd funcționarul nu observă cîte persoane așteaptă în fir, servind în medie 32 persoane pe oră.

Rezolvare. Vom folosi formulele corespunzătoare modelului în care parametrul μ al servirilor depinde de numărul n al unităților din sistem, după relația:

$$\mu_n = n^c \cdot \mu \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Din datele problemei rezultă

$$\mu = \mu_1 = 32 \text{ persoane/oră},$$

$$\mu_{30} = 40 \text{ persoane/oră}.$$

Pentru a calcula valoarea constantei c, folosim relația de mai sus pentru $n = 30$:

$$\mu_{30} = 30^c \cdot \mu_1,$$

sau

$$40 = 30^c \cdot 32.$$

Din această ecuație calculăm:

$$c = \frac{\log \frac{40}{32}}{\log\ 30} \approx 0{,}0657.$$

Cunoscînd din problemă că avem:

$$\lambda = 30 \text{ persoane/oră},$$

vom calcula probabilitățile p_n, $n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$, în funcție de p_0, cu ajutorul formulei

$$p_n = \frac{1}{(n!)^c} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots.$$

Scanned with OKEN Scanner

Obținem astfel rezultatele de pe coloana a doua a tabelului IV.18, în care s-au folosit numai pentru zecimale (pentru $n > 35$ s-a renunțat la valori, ele fiind foarte mici). Calculele corespunzătoare au fost făcute cu ajutorul tabelelor de logaritmi. Deoarece trebuie să avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$$

s-a calculat suma tuturor valorilor din coloana respectivă, obținîndu-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{p_0} \approx 6{,}9526 \approx 6{,}96,$$

de unde:

$$p_0 \approx \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n}{6{,}96} = \frac{1}{6{,}96} \approx 0{,}1437.$$

Pentru a calcula numărul mediu de unități din sistemul de așteptare la un moment dat, folosim formula de definiție:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n.$$

S-a calculat, pentru aceasta, coloana a treia a tabelului IV.18, însumîndu-se apoi toate valorile de pe această coloană. Avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot p_n}{p_0} \approx 32{,}0873,$$

de unde:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n \approx 32{,}0873 \cdot p_0 = 32{,}0873 \cdot 0{,}1437 \approx 4{,}611 \text{ persoane.}$$

Pentru a calcula numărul mediu de unități din firul de așteptare la un moment dat, aplicăm de asemenea formula de definiție

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, p_n.$$

Pentru aceasta, s-a calculat coloana a patra a tabelului IV.18, obținîndu-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\, p_n}{p_0} \approx 26{,}1355.$$

De aici deducem:

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, p_n \approx 26{,}1355 \cdot p_0 = 26{,}1355 \cdot 0{,}1437 \approx 3{,}756 \text{ persoane.}$$

Se poate calcula acum timpul mediu de așteptare a unei unități în fir:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{3{,}756}{30} = 0{,}125 \text{ ore} = 7{,}5 \text{ minute.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV. 18

n	$\frac{p_n}{p_0}$	$\frac{n-p_n}{p_0}$	$\frac{(n-1)\ p_n}{p_0}$
0	1	0	—
1	0,9375	0,9375	0
2	0,8717	1,7434	0,8717
3	0,7325	2,1975	1,4650
4	0,6269	2,5076	1,8807
5	0,5288	2,6440	2,1152
6	0,4406	2,6436	2,2030
7	0,3635	2,5445	2,1810
8	0,2941	2,3528	2,0587
9	0,2412	2,1708	1,9296
10	0,1944	1,9440	1,7496
11	0,1557	1,7127	1,5570
12	0,1240	1,4880	1,3640
13	0,0982	1,2766	1,1785
14	0,0774	1,0836	1,0062
15	0,0608	0,9120	0,8512
16	0,0475	0,7600	0,7125
17	0,0370	0,6290	0,5920
18	0,0280	0,5040	0,4760
19	0,0221	0,4199	0,3978
20	0,0170	0,3400	0,3230
21	0,0131	0,2751	0,2620
22	0,0100	0,2200	0,2100
23	0,0077	0,1771	0,1694
24	0,0058	0,1392	0,1334
25	0,0044	0,1100	0,1046
26	0,0033	0,0858	0,0825
27	0,0025	0,0675	0,0650
28	0,0019	0,0532	0,0513
29	0,0014	0,0406	0,0392
30	0,0011	0,0330	0,0319
31	0,0008	0,0248	0,0240
32	0,0006	0,0192	0,0186
33	0,0004	0,0132	0,0128
34	0,0003	0,0102	0,0099
35	0,0002	0,0070	0,0078
Total	6,9526	32,0873	26,1355

Scanned with OKEN Scanner

Timpul mediu de așteptare a unei unități în sistem este de asemenea:

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{4{,}611}{30} \approx 0{,}154 \text{ ore} = 9{,}24 \text{ minute.}$$

Diferența celor două timpuri de așteptare obținute este următoarea:

$$\bar{t}_s - \bar{t}_f = 9{,}24 - 7{,}5 = 1{,}74 \text{ minute,}$$

ea reprezentînd timpul mediu în care este servită o persoană, în modelul cercetat. Se observă că el este cuprins între $\frac{1}{\mu_1}$ și $\frac{1}{\mu_{30}}$.

În cazul în care funcționarul nu observă cîte persoane se găsesc în firul de așteptare, vom folosi formulele obișnuite de la modelul cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită, în care:

$$\lambda = 30 \text{ persoane/oră,}$$
$$\mu = 32 \text{ persoane/oră.}$$

Vom avea în acest caz:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{30}{32} = 0{,}0625,$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{32-30} = 15 \text{ persoane,}$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{30^2}{32(32-30)} \approx 14{,}06 \text{ persoane,}$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{30}{32(32-30)} \approx 0{,}47 \text{ ore} = 28{,}2 \text{ minute,}$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{32-30} \approx 0{,}5 \text{ ore} = 30 \text{ minute.}$$

Valorile obținute sînt trecute în tabelul IV.19, împreună cu valorile corespunzătoare de la modelul cercetat anterior. Se observă o totală nepotrivire a celor două feluri de rezultate, în modelul inițial cercetat existînd un număr mediu de persoane mult mai mic (în sistem, respectiv în fir), timpul de așteptare (în fir, respectiv în sistem) fiind de asemenea mult mai mic, comparativ cu cel de al doilea model.

Tabelul IV.19

Model / Indicator	Modelul cu $\mu_n = n^c \cdot \mu$	Modelul cu $\mu_n = \mu$
p_0	0,1437	0,0625
$\bar{n}$	4,611	15
$\bar{n}_f$	3,756	14,06
$\bar{t}_f$	7,5	28,2
$\bar{t}_s$	9,24	30

Scanned with OKEN Scanner

Problema 16. Pentru repararea mașinilor de un anumit tip dintr-o întreprindere, se propune angajarea a doi mecanici de aceeași calificare. Pentru această angajare, există posibilitatea angajării celor doi mecanici dintr-una din cele șase categorii menționate în tabelul IV.20, categorii ce se deosebesc după numărul mediu de mașini ce pot repara pe unitatea de timp (ziua), precum și după salariul zilnic. Se știe că timpul de reparare a unei mașini, de către un mecanic din oricare categorie, are o distribuție exponențială, de asemenea că lotul de mașini din tipul respectiv este suficient de mare pentru a putea fi presupus infinit, numărul de mașini defectate pe unitatea de timp urmînd o distribuție Poisson cu media de 1,2 mașini pe zi. Se apreciază că inactivitatea unei mașini, datorită faptului că ea este defectă, aduce un prejudiciu întreprinderii de 400 lei pe zi, această sumă reprezentînd cîștigul corespunzător producției pierdute, atît timp cît mașina este defectă.

Tabelul IV.20

Categoria	Numărul mediu mașini reparate pe zi (μ)	Salariul pe zi în lei ($c(\mu)$)
Necalificat	2	40
Calificat categ. I	3	50
Calificat categ. II	4	65
Calificat categ. III	5	80
Calificat categ. IV	6	95
Calificare superioară	7	115

a) Să se arate din ce categorie trebuie să facă parte cei doi mecanici angajați, astfel încît costul total, format din prejudiciul datorat inactivității mașinilor și din salariile mecanicilor să fie minim.

b) Aceeași problemă, dacă se acceptă propunerea de a angaja un singur mecanic. Este mai convenabilă această situație?

Rezolvare. a) Facem următoarele notații:

c_a = 400 lei/zi = costul inactivității unei mașini pe zi,

$c(\mu)$ = costul pe zi al unui mecanic ce poate repara în medie μ mașini pe zi,

$\Gamma(\mu)$ = costul total, corespunzător cazului cînd cei doi mecanici angajați aparțin categoriei de mai sus.

Cu toate aceste notații, putem scrie:

$$\Gamma(\mu) = 2c(\mu) + \overline{n}(\mu)\, c_a = 2c(\mu) + 400\, \overline{n}(\mu),$$

unde $\overline{n}(\mu)$ este numărul mediu de mașini din sistemul de așteptare la un moment dat, μ fiind parametrul servirilor corespunzător mecanicilor angajați. Valorile $c(\mu)$ sînt date de tabelul IV.20, astfel încît rămîne să calculăm pe $\overline{n}(\mu)$.

Scanned with OKEN Scanner

pentru diferitele posibilităţi de alegere a mecanicilor. Dăm ca exemplu calculul lui $\bar{n}(\mu)$ în primul caz, celelalte calcule efectuîndu-se în mod analog. Fie deci $\mu = 2$ maşini/zi, deci:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1,2}{2} = 0,6.$$

Fiind situaţi în cadrul modelului cu un fir de aşteptare, $s = 2$ staţii, populaţie infinită, obţinem:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\mu}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s} = \frac{1}{1 + 0,6 + \frac{2}{1!(4-1,2)} \cdot \frac{9}{25}} = \frac{35}{146},$$

deci:

$$\bar{n}(2) = \frac{\lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot p_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2,4}{1! \cdot 2,8^2} \cdot 0,6^2 \cdot \frac{35}{146} + 0,6 \approx 0,626 \text{ maşini.}$$

Efectuînd astfel de calcule pentru fiecare caz în parte, se obţin rezultatele de pe coloana a treia a tabelului IV.21. Cu ajutorul acestor valori şi folosind expresia ce dă pe $\Gamma(\mu)$, s-au calculat valorile de pe ultima coloană a aceluiaşi tabel. Cercetînd valorile obţinute, ne oprim asupra costului total minim, marcat cu o steluţă în tabelul IV.21. Acest cost corespunde valorii $\mu = 4$, deci cei doi mecanici ce trebuie angajaţi urmează să fie de categoria a II-a.

Tabelul IV.21

μ	$c(\mu)$	$\bar{n}(\mu)$	$\Gamma(\mu)$
2	40	0,6264	330,60
3	50	0,417	266,80
4	65	0,307	252,80*
5	80	0,2435	257,40
6	95	0,21	264,00
7	115	0,173	299,20

b) Păstrînd notaţiile de la punctul precedent, costul total $\Gamma(\mu)$ fiind corespunzător angajării unui mecanic ce poate repara în medie μ maşini pe zi, avem:

$$\Gamma(\mu) = c(\mu) + 400\ \bar{n}(\mu),$$

unde $\bar{n}(\mu)$ se calculează cu ajutorul formulei de la modelul cu un fir de aşteptare, o staţie de servire, populaţie infinită şi anume:

$$\bar{n}(\mu) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1,2}{\mu - 1,2} = \frac{12}{10\mu - 12}.$$

Avem deci:

$$\Gamma(\mu) = c(\mu) + \frac{12}{10\mu - 12} \cdot 400 = c(\mu) + \frac{4800}{10\mu - 12}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind pe μ cu toate valorile posibile, obținem succesiv:

$$\Gamma_{(2)} = 40 + \frac{4800}{20 - 12} = 640 \text{ lei},$$

$$\Gamma_{(3)} = 50 + \frac{4800}{30 - 12} \approx 317{,}70 \text{ lei},$$

$$\Gamma_{(4)} = 65 + \frac{4800}{40 - 12} \approx 236{,}40 \text{ lei},$$

$$\Gamma_{(5)} = 80 + \frac{4800}{50 - 12} \approx 206{,}30 \text{ lei},$$

$$\Gamma_{(6)} = 95 + \frac{4800}{60 - 12} = 195 \text{ lei},$$

$$\Gamma_{(7)} = 115 + \frac{4800}{70 - 12} \approx 197{,}70 \text{ lei}.$$

Costul total minim corespunde lui $\mu = 6$, deci mecanicul ce urmează a fi angajat trebuie să fie de categoria a IV-a.

Comparînd costurile totale minime din cele două situații cercetate, rezultă că este mai convenabil să se angajeze un singur mecanic de categoria a IV-a, decît doi mecanici de categoria a II-a.

Problema 17. Într-o perioadă de vîrf a strînsului recoltei, la o fermă agricolă, camioanele sosesc la locul de încărcare după o distribuție poissoniană, sosind în medie 20 camioane pe zi. Încărcarea urmează a fi asigurată de o brigadă de muncitori, angajați sezonier, alegerea putîndu-se face din trei categorii de muncitori, ce se deosebesc prin timpul mediu de încărcare a unui camion, respectiv prin plata corespunzătoare pe o zi de muncă.

Se știe că timpul de încărcare a unui camion de către un muncitor oarecare, sau de o brigadă de muncitori oricum aleși din cele trei categorii, are o distribuție exponențială. De asemenea, s-a observat că numărul mediu de camioane ce pot fi încărcate de către o brigadă pe unitatea de timp este egal cu suma numerelor medii de camioane ce pot fi încărcate de către fiecare dintre membrii brigăzii individual, pe unitatea de timp. Plata brigăzii se face proporțional cu numărul mediu de camioane ce se pot încărca pe unitatea de timp de către întreaga brigadă, socotindu-se zece lei de camion. În tabelul IV.22

Tabelul IV.22

Categoria	Timp mediu de încărcare în zile ($1/\mu$)	Număr mediu de mașini încărcate pe zi (μ)	Plata pe zi
I	0,1	10	100
II	0,111	9	90
III	0,125	8	80

Scanned with OKEN Scanner

sînt date timpurile medii în care un muncitor din fiecare categorie poate descărca un camion, numerele medii de camioane ce pot fi descărcate de cîte un muncitor din fiecare categorie individual, precum și plata pe zi a unui muncitor din fiecare categorie, indiferent de timpul în care el lucrează efectiv (pot exista perioade de inactivitate, datorită lipsei de mașini la un moment dat).

În sfîrșit, se apreciază că staționarea unui camion așteptînd descărcarea, sau la descărcare, constituie o pierdere proporțională cu timpul de staționare, ce se estimează la 600 lei pe zi.

Cum trebuie alcătuită brigada, astfel încît cheltuielile totale legate de plata muncitorilor și de staționarea camioanelor la locul de încărcare să fie minime?

O b s e r v a ț i e. Se preferă ca brigada să fie alcătuită dintr-un număr cît mai mic de muncitori și cît mai omogenă în raport cu categoriile folosite.

Rezolvare. Fie μ numărul mediu de mașini pe care trebuie să le încarce brigada pe zi. Pentru a nu avea un fenomen de aglomerare, trebuie să avem: $\mu > 20$.

Cheltuielile cu plata brigăzii vor fi date de produsul $10\,\mu$. Pe de altă parte, numărul mediu de camioane ce există în sistemul de așteptare la un moment dat se poate calcula cu formula corespunzătoare de la modelul cu un fir de așteptare, o stație (brigada), populație infinită:

$$\overline{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{\mu - 20},$$

astfel încît pierderea datorată staționării camioanelor este egală cu:

$$c_s = \frac{20}{\mu - 20} \cdot 600 = \frac{12\,000}{\mu - 20}.$$

Notînd cu $\Gamma_{(\mu)}$ funcția cheltuieli totale, avem deci:

$$\Gamma_{(\mu)} = 10\mu \cdot \frac{12\,000}{\mu - 20}, \quad \mu > 20.$$

Valoarea minimă a acestei funcții, dacă există, corespunde valorii lui μ ce anulează derivata întîi. Avem de rezolvat deci ecuația:

$$\Gamma'_{(\mu)} = 10 - \frac{12\,000}{(\mu - 20)^2} = 0,$$

din care deducem:

$$\mu = 20 + \sqrt{1200} \approx 55 \text{ camioane/zi}$$

(valoarea negativă a lui μ a fost neglijată).

Pentru a testa existența unei valori minime a funcției $\Gamma_{(\mu)}$ în punctul obținut, calculăm mai întîi derivata de ordinul doi a funcției și anume

$$\Gamma''_{(\mu)} = \frac{240\,000}{(\mu - 20)^3}.$$

Observăm că această derivată are valoare strict pozitivă pentru $\mu > 20$, ceea ce înseamnă că funcția $\Gamma_{(\mu)}$ este strict convexă pe tot domeniul său de definiție.

Scanned with OKEN Scanner

Ca urmare, ea are o valoare minimă în punctul obținut, valoare care este un minim absolut pentru tot domeniul de definiție al funcției.

Pentru a deduce compoziția brigăzii, căutăm să descompunem numărul 55 într-o sumă de cît mai puțini termeni, termeni considerați numai din mulțimea {10; 9; 8}. Se observă că această descompunere se poate face numai cu cîte șase termeni, existînd următoarele posibilități:

— brigada se compune din trei muncitori de categoria I-a, un muncitor din categoria a II-a și doi muncitori din categoria a III-a;

— brigada se compune din doi muncitori din categoria I-a, trei muncitori din categoria a II-a și un muncitor din categoria a III-a;

— brigada se compune dintr-un muncitor de categoria I-a și cinci muncitori de categoria a II-a.

Conform preferințelor enunțate de problemă, urmează ca brigada să fie alcătuită ca în cea de a treia posibilitate expusă mai sus.

Problema 18. La o stațiune de cercetări sericicole, în perioada de scoatere a materialului săditor (duzi), sosesc delegați de la diferite centre sericicole din țară, în mod întîmplător, pentru achiziționarea acestora. Prin metode statistice s-a determinat distribuția acestor sosiri, ea fiind poissoniană, cu media $\lambda = 3{,}75$ clienți pe zi. Servirea este asigurată de un funcționar, care poate servi în medie $\mu = 4$ clienți pe zi, timpul de servire a unei unități avînd o distribuție exponențială.

a) Să se cerceteze fenomenul de așteptare care are loc.

b) Să se cerceteze fenomenul de așteptare care are loc dacă servirea s-ar face cu 2 funcționari.

c) Cunoscînd cheltuielile medii cu un delegat și anume:

— cheltuieli de drum, în valoare de 80 lei,

— diurna de 18 lei pe zi, plătindu-se minimum pe o zi, precum și salariul unui salariat ce servește clienții, de 50 lei pe zi,

să se deducă varianta optimă de organizare a servirii.

Rezolvare. a) Se aplică formulele de la modelul de așteptare cu un fir, o stație de servire, populație infinită, avînd:

$$\lambda = 3{,}75 \text{ clienți/zi},$$

$$\mu = 4 \text{ clienți/zi}.$$

Se obțin astfel rezultatele de pe prima linie a tabelului IV.23.

Tabelul IV.23

s	$\bar{n}$	$\bar{n}_f$	$\bar{t}_f$	$\bar{t}_s$
1	15	14,6	3,75	4
2	1,15	0,21	0,05	0,3

Scanned with OKEN Scanner

b) Se aplică formulele de la modelul de așteptare cu un fir, mai multe stații ($s = 2$), populație infinită, avînd aceleași valori ale lui λ și μ. Rezultatele sînt cele de pe a doua linie a tabelului IV.23.

c) Notînd cu $\Gamma_{(s)}$ cheltuielile totale, de plata stațiilor, de servire și de deplasare a delegaților, iar cu c_s costul mediu de așteptare în sistem a unui delegat, timp de o zi, avem:

$$\Gamma_{(s)} = 50s + c_s \cdot n(s).$$

Pentru cazul $s = 1$, cheltuielile medii totale cu un delegat sînt următoarele:

— cheltuieli de drum, 80 lei,

— diurna, în medie pe patru zile, de 72 lei.

Revin în medie, pe zi:

$$c_1 = \frac{80+72}{4} = 38 \text{ lei/zi},$$

deci

$$\Gamma_{(1)} = 50 \cdot 1 + 38 \cdot 15 = 620 \text{ lei}.$$

Pentru cazul $s = 2$, cheltuielile medii totale cu un delegat se referă la cheltuielile medii pe o singură zi (minimum pentru delegație), ele fiind egale cu:

$$c_2 = 80 + 18 = 98 \text{ lei}.$$

Obținem deci:

$$\Gamma_{(2)} = 50 \cdot 2 + 98 \cdot 1{,}15 = 213{,}70 \text{ lei}.$$

Rezultă avantajul organizării servirii cu doi funcționari.

Problema 19. Într-o întreprindere lucrează un lot de 15 mașini de același tip și cu același grad de uzură, care se defectează în mod aleator în procesul de producție. Pentru a cerceta legea statistică după care se defectează aceste mașini, s-a măsurat timpul de funcționare neîntreruptă, de la momentul terminării unei reparări pînă la apariția defecțiunii următoare, în 40 situații luate la întîmplare, la diferite mașini din lotul respectiv. Rezultatele acestor măsurători sînt trecute în tabelul IV.24, în care este precizată poziția celor 40 valori măsurate, în raport cu zece intervale de timp egale (de cîte o jumătate de oră fiecare), alese prin convenție.

Tabelul IV.24

Interval de timp în ore	Număr de observații	Interval de timp în ore	Număr de observații
2;2,5	2	4,5;5	1
2,5;3	15	5;5,5	—
3;3,5	10	5,5;6	1
3,5;4	6	6;6,5	
4;4,5	4	6,5;7	1

Scanned with OKEN Scanner

Reparațiile la mașinile defecte sînt realizate de unul, eventual mai mulți mecanici cu aceeași pricepere. Pentru a determina distribuția timpului în care un mecanic poate repara o mașină, s-a măsurat timpul de reparare a 32 mașini defecte, alese la întîmplare. În tabelul IV.25, sînt precizate pozițiile rezultatelor acestor măsurători, în raport cu opt intervale de timp egale (de cîte un minut fiecare), alese de asemenea prin convenție.

Tabelul IV.25

Interval de timp în minute	Număr de observații	Interval de timp în minute	Număr de observații
(15,16]	10	(19,20]	3
(16,17]	11	(20,21]	1
(17,18]	4	(21,22]	—
(18,19]	2	(22,23]	1

Se cunoaște că salariul unui mecanic este de 50 lei pe zi și că inactivitatea unei mașini, datorită faptului că așteaptă să fie reparată, aduce întreprinderii o pierdere apreciată la 800 lei pe zi.

Să se determine numărul de mecanici ce urmează să fie angajați pentru repararea mașinilor din lot, astfel încît cheltuielile totale, formate din plata mecanicilor pe timpul de inactivitate și din pierderile datorate așteptării mașinilor defecte de a intra la reparație, să fie minime.

Rezolvare. Pentru a stabili natura distribuției timpului de funcționare neîntreruptă a unei mașini înainte de defectare, timp pe care îl vom nota cu τ, trebuie mai întîi să întrunim această distribuție, să facem o ipoteză asupra sa, ipoteză pe care ulterior să o testăm. Vom considera ca valori observate ale timpului τ mijloacele intervalelor din tabelul IV.24, astfel încît histograma distribuției empirice a lui τ este cea din figura IV.1. Forma acestei histograme ne sugerează o distribuție exponențială pentru timpul τ. Făcînd ipoteza H_0, că τ are o distribuție exponențială, vom aplica testul lui Kolmogorov pentru această ipoteză. În acest scop, trebuie să estimăm mai întîi parametrul λ, corespunzător distribuției exponențiale presupuse, fapt pentru care a fost calculată coloana a patra a tabelului IV.26, prin înmulțirea valorilor corespunzătoare coloanelor a doua și a treia. Totalul acestei coloane conduce la următoarea va-

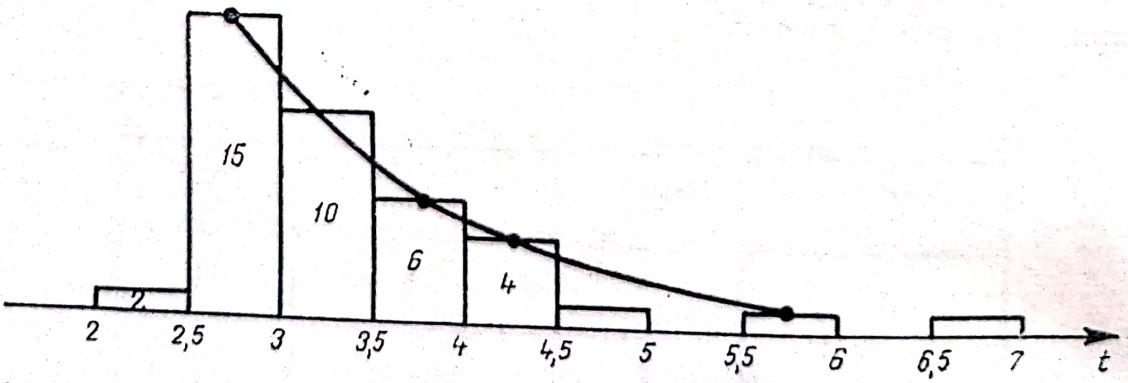


Fig. IV.1

Tabelul IV.26

Interval	τ_i	N_i	$\tau_i N_i$	$F_n(\tau)$	$F(\tau)$	$\lvert F_n(\tau)-F(\tau)\rvert$
2;2,5	2,25	2	4,50	0,050	0,523	0,473
2,5;3	2,75	15	41,50	0,425	0,589	0,164
3;3,5	3,25	10	32,50	0,675	0,647	0,028
3,5;4	3,75	6	22,50	0,825	0,694	0,131
4;4,5	4,25	4	17,00	0,925	0,734	0,191
4,5;5	4,75	1	4,75	0,950	0,772	0,178
5;5,5	5,25	0	0	0,950	0,810	0,140
5,5;6	5,75	1	5,75	0,975	0,830	0,145
6;6,5	6,25	0	0	0,975	0,854	0,121
6,5;7	6,75	1	6,75	1,000	0,874	0,126
TOTAL	—	40	135,00	—	—	—

loare medie a timpului de funcţionare neîntreruptă a unei maşini, înaintea apariţiei unei defecţiuni:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \tau_i N_i}{\sum_{i=1}^{10} N_i} = \frac{135}{40} = 3{,}375 \text{ ore.}$$

Conform ipotezei H_0, această valoare este inversă parametrului λ al sosirilor maşinilor în sistemul de aşteptare, deci:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}} = \frac{40}{135} \approx 0{,}296 \text{ maşini/oră.}$$

Cu ajutorul valorii obţinute pentru λ, calculăm valorile funcţiei de repartiţie teoretice, în marginile din dreapta ale intervalelor din tabelul IV.26, folosind formula următoare:

$$F_{(\tau)} = 1 - e^{-\lambda\tau} = 1 - e^{-0{,}296 \cdot \tau}.$$

Trecem aceste valori în coloana a şasea a acestui tabel. Iată cîteva exemple de calcul de acest fel, începînd cu primele valori:

$$F_{(2,5)} = 1 - e^{-0{,}296 \cdot 2{,}5} = 1 - e^{-0{,}74} = 1 - \frac{1}{2{,}096} \approx 0{,}523,$$

$$F_{(3)} = 1 - e^{-0{,}888} = 1 - \frac{1}{2{,}435} \approx 0{,}589,$$

$$F_{(3,5)} = 1 - e^{-1{,}036} = 1 - \frac{1}{2{,}83} \approx 0{,}647.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coloana a cincea a tabelului IV.26 conține valorile funcției de repartiție empirice, obținute de deasupra ei și împărțind la $\sum_{i=1}^{10} N_i = 40$. În sfîrșit, ultima coloană a tabelului IV.26 conține diferențele dintre valorile corespunzătoare ale funcțiilor de repartiție, empirică și teoretică, în valoare absolută. În tabel este încadrată valoarea

$$\max | F_{n(\tau)} - F_{(\tau)} | = 0{,}473.$$

Considerînd drept nivel de semnificație $\varepsilon = 0{,}01$, tabelul de valori corespunzătoare testului lui Kolmogorov ne conduce la valoarea:

$$\lambda_0 = 1{,}63.$$

Cu ajutorul acestei valori, ținînd seama că tabelul IV.26 a folosit $n = 10$ intervale pentru τ, calculăm

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}63}{\sqrt{10}} \approx 0{,}5154.$$

Avem deci o situație de forma:

$$\max | F_{n(\tau)} - F_{(\tau)} | < \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}},$$

ceea ce ne îndreptățește să acceptăm ipoteza H_0, deci să considerăm că intervalul de funcționare neîntreruptă a unei mașini înainte de defectare are o distribuție exponențială, de parametru:

$$\lambda = 0{,}296 \text{ mașini/oră}.$$

Urmează să stabilim natura distribuției timpului de reparare a unei mașini, de către un mecanic, timp pe care îl vom nota cu t. Considerînd și de această dată ca valori observate ale timpului t mijloacele intervalelor din tabelul IV.25, histograma distribuției empirice a lui T este cea din figura IV.2, ea sugerîn-

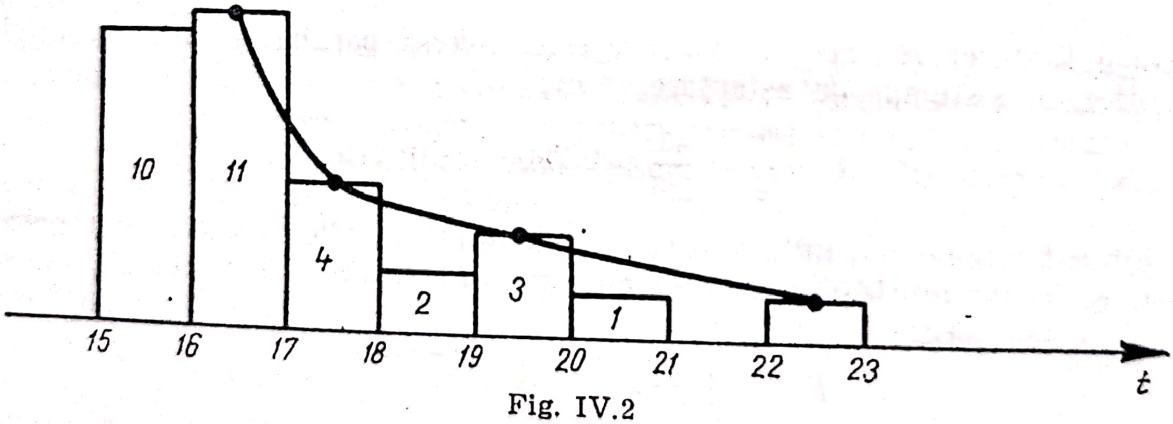


Fig. IV.2

du-ne de asemenea o distribuție exponențială și pentru t. Facem deci ipoteza H_1, că t are o distribuție exponențială, și aplicăm din nou testul Kolmogorov. Valoarea medie a timpului t, de reparare a unei singure mașini de către un mecanic, este, conform tabelului IV.27:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{8} t_i N_i}{\sum_{i=1}^{8} N_i} = \frac{545}{32} = 17{,}031 \text{ minute},$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV.27

Interval	t_i	N_i	$t_i N_i$	$F_n(t)$	$F(t)$	$\lvert F_n(t)-F(t)\rvert$
(15, 16]	15,5	10	155,0	0,313	0,610	**0,297**
(16, 17]	16,5	11	181,5	0,656	0,632	0,024
(17, 18]	17,5	4	70,0	0,781	0,653	0,128
(18, 19]	18,5	2	37,0	0,844	0,672	0,172
(19, 20]	19,5	3	58,5	0,938	0,691	0,247
(20, 21]	20,5	1	20,5	0,968	0,709	0,259
(21, 22]	21,5	0	0	0,968	0,725	0,243
(22, 23]	22,5	1	22,5	1,000	0,741	0,259
Total	—	32	545,0	—	—	—

astfel încît numărul mediu de mașini ce pot fi reparate de un singur mecanic pe unitatea de timp este

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{32}{545} \approx 0{,}0587 \text{ mașini/minut.}$$

Cu ajutorul acestei valori, se calculează coloana $F(t)$, folosind formula:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-0{,}0587\, t},$$

pentru valorile lui t, egale cu extremitățile din dreapta ale intervalului din tabel. Celelalte coloane ale tabelului se calculează în mod asemănător ca în cazul precedent. Din tabelul IV.27 extragem:

$$\min |F_n(t) - F(t)| = 0{,}297.$$

Considerînd același nivel de semnificație, $\varepsilon = 0{,}01$, valoarea λ_0 extrasă din tabel este aceeași, iar:

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}73}{\sqrt{8}} \approx 0{,}576.$$

Deoarece avem:

$$\min |F_n(t) - F(t)| < \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}},$$

acceptăm ipoteza H_1, deci considerăm timpul de reparare a unei mașini, de către un mecanic, exponențial, cu parametrul:

$$\mu = 0{,}0587 \text{ mașini/minut} = 3{,}522 \text{ mașini/oră.}$$

Fenomenul de așteptare care ia naștere în modul indicat de problemă poate fi cercetat cu ajutorul modelelor în care sosirea unităților în sistem este de natură

Scanned with OKEN Scanner

poissoniană iar timpul de servire a unei unități este exponențial. Fie s numărul de mecanici ce urmează a fi angajați pentru repararea mașinilor din lotul în cauză.

Să notăm cu $\Gamma_1(s)$ cheltuielile totale pe oră, cheltuieli formate din plata mecanicilor pe timpul de inactivitate și din pierderile datorate așteptării mașinilor în firul de așteptare.

Ținînd seama de faptul că salariul unui mecanic este de 6,25 lei pe oră și că pierderile datorate așteptării unei mașini în fir sînt de 100 lei pe oră (am considerat ziua de lucru de opt ore), avem:

$$\Gamma(s) = 6{,}25\,(s - \bar{n}_s) + 100\,\bar{n}_f.$$

Pentru calcularea indicatorilor necesari pentru determinarea lui $\Gamma(s)$, $s = 1,2,3,\ldots$, aplicăm formulele de la modelul cu un fir de așteptare, mai multe stații (respectiv o stație, pentru $s=1$), populație finită. Pentru toate cazurile avem:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}296}{3{,}522} \approx 0{,}084.$$

Fie mai întîi $s=1$, pentru care avem:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} A_m^n \cdot \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{15} A_{15}^n \cdot 0{,}084^n}.$$

Termenii sumei, de la numitorul fracției de mai sus, se calculează prin secvență, pînă cînd devin neglijabili. Notînd acești termeni prin $\theta(n)$, ei corespund valorilor atribuite lui n, avem:

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= A_{15}^0 \cdot 0{,}084^0 = 1,\\
\theta(1) &= A_{15}^1 \cdot 0{,}084^1 = 1{,}26,\\
\theta(2) &= A_{15}^2 \cdot 0{,}084^2 = \theta(1)\ 14\ .\ 0{,}084 \approx 1{,}49,\\
\theta(3) &= A_{15}^3 \cdot 0{,}084^3 = \theta(2)\ 13\ .\ 0{,}084 \approx 1{,}62,\\
\theta(4) &= A_{15}^4 \cdot 0{,}084^4 = \theta(3)\ 12\ .\ 0{,}084 \approx 1{,}64,\\
\theta(5) &= A_{15}^5 \cdot 0{,}084^5 = \theta(4)\ 11\ .\ 0{,}084 \approx 1{,}51,\\
\theta(6) &= A_{15}^6 \cdot 0{,}084^6 = \theta(5)\ 10\ .\ 0{,}084 \approx 1{,}27,\\
\theta(7) &= A_{15}^7 \cdot 0{,}084^7 = \theta(6)\ 9\ .\ 0{,}084 \approx 0{,}96,\\
\theta(8) &= A_{15}^8 \cdot 0{,}084^8 = \theta(7)\ 8\ .\ 0{,}084 \approx 0{,}65,\\
\theta(9) &= A_{15}^9 \cdot 0{,}084^9 = \theta(8)\ 7\ .\ 0{,}084 \approx 0{,}38,\\
\theta(10) &= A_{15}^{10} \cdot 0{,}084^{10} = \theta(9)\ 6\ .\ 0{,}084 \approx 0{,}20,\\
\theta(11) &= A_{15}^{11} \cdot 0{,}084^{11} = \theta(10)\ 5\ .\ 0{,}084 \approx 0{,}09,\\
\theta(12) &= A_{15}^{12} \cdot 0{,}084^{12} = \theta(11)\ 4\ .\ 0{,}084 \approx 0{,}04.
\end{aligned}$$

Numitorul fracției menționate este deci aproximativ egal cu suma valorilor obținute mai sus:

$$\sum_{n=0}^{15} \theta(n) \approx 12{,}11.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea deci:

$$p_0 = \frac{s}{12{,}11} \approx 0{,}0825.$$

Calculul indicatorilor $\bar{n}$ și $\bar{n}_f$ se poate face acum cu ajutorul formulelor de la modelul cu o singură stație de servire:

$$\bar{n} = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0) = 15 - \frac{1}{0{,}084}(1 - 0{,}0825) \approx 4{,}082 \text{ mașini},$$

$$\bar{n}_f = m - \frac{\mu + \lambda}{\mu}(1 - p_0) = 15 - (1 - 0{,}084)(1 - 0{,}0825) \approx 3{,}165 \text{ mașini}.$$

În plus, avem:

$$\bar{n}_s = \bar{n} - \bar{n}_f = 1 - p_0 \approx 0{,}917 \text{ mașini}.$$

Fie acum $s = 2$, pentru care avem:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} C_m^n \cdot \rho^n + \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s}^{m} A_m^n \left(\frac{\rho}{s}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} C_{15}^n \cdot 0{,}084^n + \frac{2^2}{2!} \sum_{n=2}^{15} A_{15}^n \cdot 0{,}042^n}.$$

Notînd cu $\varphi(n)$ termenii de la numitorul sumei, ce corespund valorilor atribuite lui n, avem:

$$\begin{aligned}
\varphi_{(0)} &= C_{15}^0 \cdot 0{,}084^\circ = 1, \\
\varphi_{(1)} &= C_{15}^1 \cdot 0{,}084 = 1{,}26, \\
\varphi_{(2)} &= 2 \cdot A_{15}^2 \cdot 0{,}042^3 \approx 0{,}74, \\
\varphi_{(3)} &= 2 \cdot A_{15}^3 \cdot 0{,}042^4 = \varphi_{(2)} \cdot 12 \cdot 0{,}042 \approx 0{,}40, \\
\varphi_{(4)} &= 2 \cdot A_{15}^4 \cdot 0{,}042^5 = \varphi_{(3)} \cdot 11 \cdot 0{,}042 \approx 0{,}20, \\
\varphi_{(5)} &= 2 \cdot A_{15}^5 \cdot 0{,}042^6 = \varphi_{(4)} \cdot 10 \cdot 0{,}042 \approx 0{,}10, \\
\varphi_{(6)} &= 2 \cdot A_{15}^6 \cdot 0{,}042^7 = \varphi_{(5)} \cdot 9 \cdot 0{,}042 \approx 0{,}04,
\end{aligned}$$

ceilalți termeni fiind neglijabili. Avem deci:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{15} \varphi_{(n)}} \approx \frac{1}{3{,}74} \approx 0{,}27.$$

Observăm, în plus, că avem în general:

$$p_n = \varphi_{(n)} \cdot p_0,$$

astfel încît putem calcula ușor aceste probabilități și obținem:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \varphi_{(1)} \cdot p_0 = 1{,}26 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}34, \\
p_2 &= \varphi_{(2)} \cdot p_0 = 0{,}74 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}20, \\
p_3 &= \varphi_{(3)} \cdot p_0 = 0{,}40 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}10, \\
p_4 &= \varphi_{(4)} \cdot p_0 = 0{,}20 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}05, \\
p_5 &= \varphi_{(5)} \cdot p_0 = 0{,}10 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}02, \\
p_6 &= \varphi_{(6)} \cdot p_0 = 0{,}04 \cdot 0{,}27 \approx 0{,}01,
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

celelalte probabilități fiind neglijabile. Cu aceste valori, putem calcula indicatorii $\bar{n}$ și $\bar{n}_f$, fără a mai folosi formulele corespunzătoare de la modelul indicat, ci folosind formulele de definiție:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{15} n \cdot p_n \approx 0 \cdot 0{,}27 + 1 \cdot 0{,}34 + 2 \cdot 0{,}20 + 3 \cdot 0{,}10 + 4 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}02 + 6 \cdot 0{,}01 = 1{,}4 \text{ mașini},$$

$$\bar{n}_f = \sum_{n=2}^{15} (\bar{n} - 2)\, p_n = 0 \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}02 + 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}3 \text{ mașini},$$

avem deci:

$$\bar{n}_s = \bar{n} - \bar{n}_f = 1{,}4 - 0{,}3 = 1{,}1 \text{ mașini}.$$

Pentru $s = 3$, avem:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} C_{15}^n \cdot 0{,}084^n + \frac{3^3}{3!} \sum_{n=3}^{15} A_{15}^n \cdot 0{,}28^n}.$$

Notînd și aici cu $\varphi(n)$ termenii de la numitorul expresiei, avem:

$$\varphi(0) = C_{15}^0 \cdot 0{,}084^0 = 1,$$
$$\varphi(1) = C_{15}^1 \cdot 0{,}084 = 1{,}26,$$
$$\varphi(2) = C_{15}^2 \cdot 0{,}084^2 = 0{,}74,$$
$$\varphi(3) = \frac{9}{2} \cdot A_{15}^3 \cdot 0{,}28^3 \approx 0{,}27,$$
$$\varphi(4) = \frac{9}{2} \cdot A_{15}^4 \cdot 0{,}28^4 = \varphi(3) \cdot 12 \cdot 0{,}028 \approx 0{,}09,$$

ceilalți termeni fiind neglijabili. Obținem astfel:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{15} \varphi(n)} \approx \frac{1}{3{,}36} \approx 0{,}2981.$$

Cu această valoare, obținem succesiv:

$$p_1 = \varphi(1) \cdot p_0 = 1{,}26 \cdot 0{,}298 \approx 0{,}374,$$
$$p_2 = \varphi(2) \cdot p_0 = 0{,}74 \cdot 0{,}298 \approx 0{,}220,$$
$$p_3 = \varphi(3) \cdot p_0 = 0{,}27 \cdot 0{,}298 \approx 0{,}081,$$
$$p_4 = \varphi(4) \cdot p_0 = 0{,}09 \cdot 0{,}298 \approx 0{,}026,$$

celelalte probabilități fiind neglijabile. Vom calcula deci pe $\bar{n}$ și $\bar{n}_f$, astfel:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{15} \bar{n} \cdot p_n \approx 0 \cdot 0{,}298 + 1 \cdot 0{,}374 + 2 \cdot 0{,}220 + 3 \cdot 0{,}081 + 4 \cdot 0{,}026 \approx 1{,}16 \text{ mașini},$$

$$\bar{n}_f = \sum_{n=3}^{15} (\bar{n} - 3)\, p_n \approx 0 \cdot 0{,}081 + 1 \cdot 0{,}026 = 0{,}026 \text{ mașini}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci:

$$\bar{n}_s = \bar{n} - \bar{n}_f = 1{,}16 - 0{,}026 = 1{,}134 \text{ mașini.}$$

În sfîrșit, pentru $s = 4$, se obțin în mod asemănător următoarele probabilități:

$$p_0 \approx 0{,}30, \qquad p_3 \approx 0{,}082.$$
$$p_1 \approx 0{,}384, \qquad p_4 \approx 0{,}0024.$$
$$p_2 \approx 0{,}0226, \qquad p_5 \approx 0{,}00055.$$

Vom găsi deci următoarele valori:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{15} n \cdot p_n \approx 1{,}102 \text{ mașini,}$$

$$\bar{n}_j = \sum_{n=4}^{15} (n-4)\, p_n \approx 0{,}00055 \text{ mașini,}$$

$$\bar{n}_s = \bar{n} - \bar{n}_f \approx 1{,}10145 \text{ mașini.}$$

Strîngînd rezultatele obținute într-un tabel de forma tabelului IV.28 și calculînd pentru fiecare caz valoarea funcției $\Gamma_{(s)}$ observăm că apar cheltuieli totale minime pe oră, în dreptul lui $s = 3$. Decizia optimă ce rezultă de aici este aceea că vor trebui angajați trei mecanici, care să se ocupe de repararea defecțiunilor apărute la cele 15 mașini ale întreprinderii.

Tabelul IV.28

s	$\bar{n}_f$	$\bar{n}$	$\bar{n}_s$	$s - \bar{n}_s$	$\Gamma_{(s)}$
1	3,165	4,082	0,917	0,083	317
2	0,3	1,4	1,1	0,9	35,60
3	0,026	1,16	1,134	1,866	14,30
4	0,00055	1,102	1,10145	2,89855	18,20

Problema 20. La magazia de materiale consumabile, a unei întreprinderi mari, sosesc muncitorii întreprinderii pentru preluarea unor materiale, tot timpul zilei. Pentru a cerceta legea de distribuție, după care apar sosirile întîmplătoare ale muncitorilor la magazie, se face o cercetare, considerînd la întîmplare 126 intervale de cîte cinci minute, în care se numără de fiecare dată cîți muncitori au sosit în intervalul respectiv. S-au obținut astfel datele din tabelul IV.29, în care se reprezintă numărul muncitorilor sosiți într-un interval cu x, iar cu N_x numărul intervalelor în care s-au numărat cîte x sosiri.

Pe de altă parte, pentru a cerceta legea de distribuție a timpului în care un distribuitor de materiale predă unui muncitor materialele cerute, s-a măsurat, în minute, timpul de servire la 70 muncitori, aleși la întîmplare, obținîndu-se datele din tabelul IV.30, în care s-a notat cu (y_{i-1}, y_i) un interval de timp oa-

Tabelul IV.29

x	N_x
0	1
1	1
2	3
3	2
4	7
5	12
6	16
7	18
8	18
9	15
10	11
11	11
12	6
13	3
14	1
15	1
Total	126

Tabelul IV.30

(y_{i-1}, y_i)	N_i
(1,25;2,5]	26
(2,5;3,75]	24
(3,75;5]	10
(5;6,25]	2
(6,25;7,5]	3
(7,5;8,75]	2
(8,75;10]	1
(10;11,25]	1
(11,25;12,5]	1
Total	70

recare, iar cu N_i numărul de muncitori, din cei 70, care au fost serviți într-un timp cuprins în acest interval.

Spațiul rezervat așteptării muncitorilor este suficient de mare, muncitorii fiind serviți în ordinea sosirii lor. De asemenea, numărul total al muncitorilor ce pot solicita materiale de la magazie este foarte mare, ceea ce îndreptățește să considerăm sursa infinită.

Să se determine numărul optim de distribuitori, în următoarele situații:

a) Salariile unui muncitor și unui distribuitor sînt egale.

b) Salariul unui muncitor este de două ori mai mare decît cel al unui distribuitor.

Rezolvare: Histograma distribuției empirice a sosirilor, reprezentată în figura IV.3, sugerează o distribuție de tip Poisson pentru aceste sosiri. Facem deci ipoteza H_0, că numărul de sosiri ale muncitorilor la magazie pe unitate de timp (cinci minute) are următoarea distribuție:

$$f_{(x)} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Pentru estimarea parametrilor din distribuția propusă, precum și pentru testarea ipotezei H_0, s-au calculat valorile din tabelul IV.31, așa cum se arată în continuare.

Scanned with OKEN Scanner

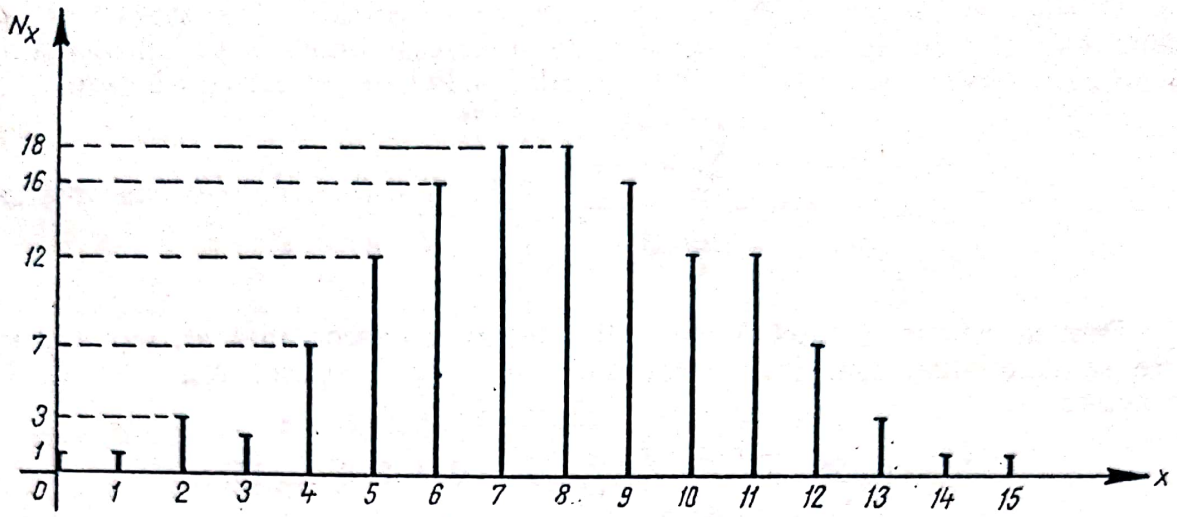


Fig. IV.3

Tabelul IV.31

x	N_x	$x \cdot N_x$	N'_x	$N_x - N'_x$	$\frac{(N_x - N'_x)^2}{N'_x}$
0	1	0	0,05	0,9	0,133
1	1	1	0,42		
2	3	6	1,57		
3	2	6	4,06		
	7		6,1		
4	7	28	7.85	—0,85	0,092
5	12	60	12,13	—0,13	0,001
6	16	96	15,61	0,39	0,009
7	18	126	17,22	0,78	0,032
8	18	144	16,62	1,38	0,114
9	15	135	14,26	0,74	0,038
10	11	110	11,01	—0,01	0,000
11	11	121	7,73	2,27	0,066
12	6	72	4,97	1,03	0,213
13	3	39	2,95	—0,4	0,030
14	1	14	1,62		
15	1	15	0,83		
	5		5,4		
Total	126	973	—	—	0,728

Scanned with OKEN Scanner

Coloana $x \cdot N_x$ a tabelului s-a calculat prin înmulțirea elementelor din coloana x cu elementele corespunzătoare (de pe aceeași linie) de pe coloana N_x. După cum se știe, parametrul λ din distribuția Poisson se estimează prin:

$$\lambda = \frac{\sum_{x=0}^{15} x \cdot N_x}{\sum_{x=0}^{15} N_x} = \frac{973}{126} \approx 7{,}722.$$

Pentru testarea ipotezei N_0, se aplică testul de concordanță χ^2, fapt pentru care se determină, mai întîi, frecvențele absolute teoretice, N'_x, calculate în formula:

$$N'_x = 0{,}126 \cdot e^{-7{,}722} \cdot \frac{7{,}722^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 15.$$

Pentru un calcul mai ușor al acestor frecvențe, se calculează întîi în mod direct (cu formula indicată) valoarea N'_8, pentru care frecvența empirică corespunzătoare este maximă:

$$N'_8 = 0{,}126 \cdot e^{-7{,}722} \cdot \frac{7{,}722^8}{8!} \approx 16{,}62.$$

Pentru valorile lui x mai mici decît opt, folosim următoarea formulă de recurență:

$$N'_x = \frac{x+1}{7{,}722} \cdot N'_{x+1};$$

vom avea deci următoarele calcule:

$$x = 7;\ N'_7 = \frac{8}{7{,}722} \cdot 16{,}62 \approx 12{,}22,$$

$$x = 6;\ N'_6 = \frac{7}{7{,}722} \cdot 17{,}22 \approx 15{,}61,$$

$$x = 5;\ N'_5 = \frac{6}{7{,}722} \cdot 15{,}61 \approx 12{,}13,$$

$$x = 4;\ N'_4 = \frac{5}{7{,}722} \cdot 12{,}13 \approx 7{,}85,$$

$$x = 3;\ N'_3 = \frac{4}{7{,}722} \cdot 7{,}85 \approx 4{,}06,$$

$$x = 2;\ N'_2 = \frac{3}{7{,}722} \cdot 4{,}06 \approx 1{,}57,$$

$$x = 1;\ N'_1 = \frac{2}{7{,}722} \cdot 1{,}57 \approx 0{,}42,$$

$$x = 0;\ N'_0 = \frac{1}{7{,}722} \cdot 0{,}42 \approx 0{,}05.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru valorile lui x mai mari decît opt, folosim formula de recurență ce urmează:

$$N'_x = \frac{\lambda}{x} N'_{x-1},$$

obținînd următoarele calcule:

$$x = 9;\ N'_9 = \frac{7{,}722}{9} \cdot 16{,}62 = 14{,}26,$$

$$x = 10;\ N'_{10} = \frac{7{,}722}{10} \cdot 14.26 = 11{,}01,$$

$$x = 11;\ N'_{11} = \frac{7{,}722}{11} \cdot 11{,}01 = 7{,}73.$$

$$x = 12;\ N'_{12} = \frac{7{,}722}{12} \cdot 7{,}73 = 4{,}97,$$

$$x = 13;\ N'_{13} = \frac{7{,}722}{13} \cdot 4{,}97 = 2{,}95,$$

$$x = 14;\ N'_{14} = \frac{7{,}722}{14} \cdot 2{,}95 = 1{,}62,$$

$$x = 15;\ N'_{15} = \frac{7{,}722}{15} \cdot 1{,}62 = 0{,}83.$$

Deoarece în primele patru linii ale tabelului IV.31 avem: $N_x < 25$, am cumulat valorile N_x, respectiv N'_x, ale acestor linii, în cîte o singură valoare de acest fel. Același lucru pentru ultimele linii ale tabelului.

Ultimele două coloane ale tabelului IV.31 urmăresc calculul sumei:

$$\sum_x \frac{(N_x - N'_x)^2}{N'_x},$$

care, după cum se știe, conform ipotezei H_0 trebuie să aibă o distribuție χ^2 cu nouă grade de libertate (s-au folosit 11 termeni ai sumei și s-a estimat un singur parametru).

Avem:

$$\chi^2_c = \sum_x \frac{(N_x - N'_x)^2}{N'_x} = 0{,}728.$$

Pe de altă parte, tabelul corespunzător distribuției χ^2 cu nouă grade de libertate dă pentru un nivel de semnificație $\varepsilon = 0{,}05$, valoarea:

$$\chi^2_\varepsilon = 16{,}9.$$

Deoarece avem:

$$\chi^2_c < \chi^2_\varepsilon,$$

acceptăm ipoteza H_0, deci considerăm ca distribuție a numărului de sosiri în sistemul de așteptare, pe unitatea de timp, o distribuție Poisson, cu:

$$\lambda = 7{,}722 \text{ muncitori în cinci minute.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să găsim acum legea de distribuţie a timpului de servire a unei unităţi de către o staţie. Pentru a avea aceeaşi unitate de timp ca şi în cazul sosirilor (cinci minute), vom modifica intervalele din tabelul IV.30, micşorînd fiecare valoare de cinci ori. Obţinem astfel prima coloană a tabelului IV.32. Cea

Tabelul IV.32

$[y_{(i-1)}, y_i]$	y	N_y	$y \cdot N_y$	$F_n(y)$	$F(y)$	$[F_n(y) - F(y)]$
(0,25;0,5]	0,375	26	9,750	0,371	0,507	0,136
(0,5;0,75]	0,625	24	15,000	0,714	0,653	0,061
(0,75;1]	0,875	10	8,750	0,857	0,757	0,100
(1;1,25]	1,125	2	2,250	0,886	0,829	0,057
(1,25;1,5]	1,371	3	4,125	0,928	0,880	0,048
(1,5;1,75]	1,625	2	3,250	0,957	0,916	0,041
(1,75;2]	1,875	1	1,875	0,971	0,941	0,030
(2;2,25]	2,125	1	2,125	0,985	0,959	0,026
(2,25;2,5]	2,375	1	2,375	1,000	0,971	0,029
Total	—	70	49,5	—	—	—

de-a doua coloană a acestui tabel conţine valorile lui y, egale cu mijloacele intervalelor corespunzătoare din prima coloană, iar coloana a treia conţine frecvenţele absolute empirice ale acestor valori, culese prin observaţii, aşa cum s-a arătat. Histograma distribuţiei empirice, reprezentată în figura IV.4, sugerează o distribuţie teoretică exponenţială pentru timpul de servire a unei uni-

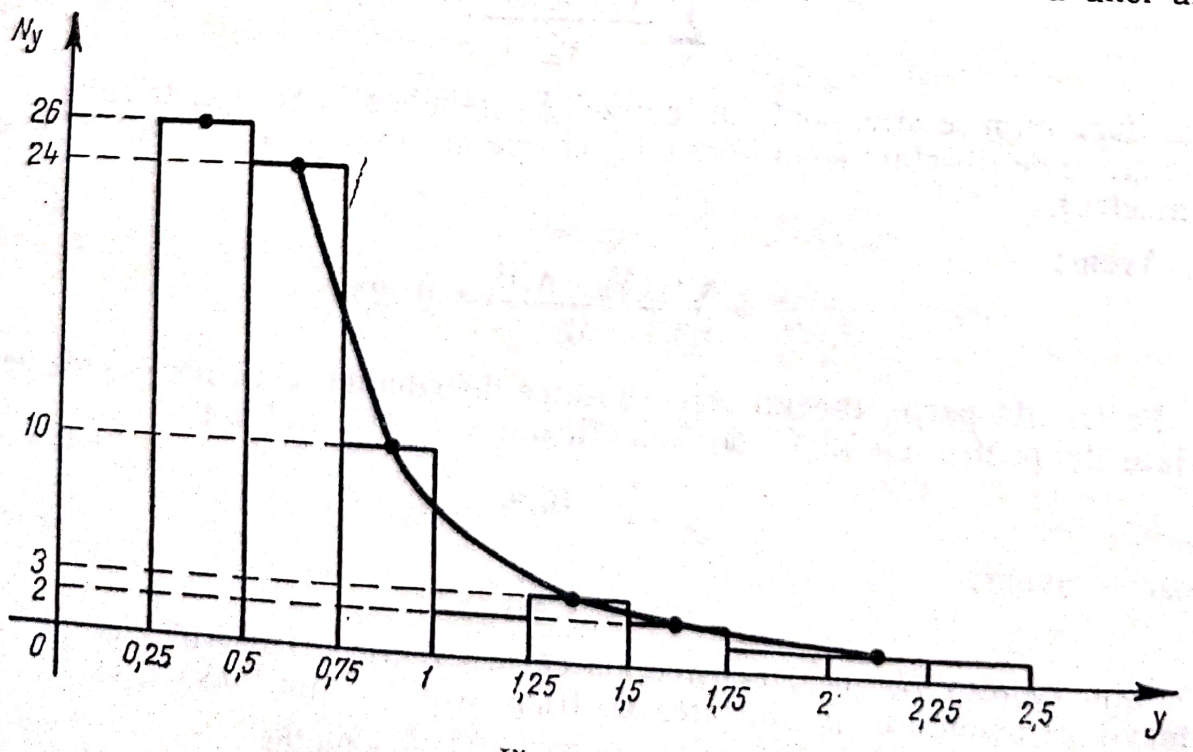


Fig. IV.4

tăți, deci facem ipoteza H_1, că acest timp de servire are următoarea densitate de probabilitate:

$$f_{(y)} = \mu \cdot e^{-\mu y} \quad , \; y > 0.$$

Coloana a patra a tabelului IV.32 folosește la estimarea parametrului μ al acestei distribuții. După cum se știe, media teoretică, $\frac{1}{\mu}$, este estimată prin media de selecție:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sum\limits_{y} y \cdot N_y}{\sum\limits_{y} N_y},$$

de unde scoatem:

$$\mu = \frac{\sum\limits_{y} N_y}{\sum\limits_{y} y \cdot N_y} = \frac{70}{49{,}5} \approx 1{,}414.$$

Ultimele trei coloane ale tabelului IV.32 folosesc la testarea ipotezei H_1, folosind testul lui Kolmogorov. Astfel, coloana $F_n(y)$, a funcției de repartiție empirice, s-a calculat cumulînd pentru fiecare linie frecvențele empirice, N_y, de pe linia respectivă și de pe toate liniile superioare ei, și împărțind apoi suma obținută la

$$\sum_{y} N_y = 70.$$

Valorile funcției de repartiție teoretice, de pe coloana $F(y)$, s-au calculat cu ajutorul formulei generale a funcției de repartiție a distribuției exponențiale de parametru $\mu = 1{,}414$;

$$F(y) = 1 - e^{-1{,}414\, y}.$$

Considerînd pentru fiecare interval, drept valoare y, marginea superioară a intervalului, calculele intermediare pentru determinarea valorilor $F(y)$ apar ca în tabelul IV.33.

Tabelul IV.33

y	μy	$e^{\mu y}$	$e^{-\mu y}$	$F(y)$
0.5	0,707	2,028	0,493	0,507
0,75	1,061	2,889	0,347	0,653
1	1,414	4,112	0,243	0,757
1,25	1,767	5,854	0,171	0,829
1,5	2,121	8,339	0,120	0,880
1,75	2,475	11,88	0,084	0,916
2	2,828	16,92	0,059	0,941
2,25	3,181	24,08	0,041	0,959
2,5	3,535	34,30	0,029	0,971

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, ultima coloană a tabelului IV.32 conține diferențele, în modul, dintre valorile funcției de repartiție empirice și funcției de repartiție teoretice. Cea mai mare diferență de acest fel este încadrată în tabel.

Tabelul corespunzător testului lui Kolmogorov ne conduce, pentru un nivel de semnificație $\varepsilon = 0{,}01$, la valoarea:

$$\lambda_0 = 1{,}63.$$

Cu ajutorul acestei valori, calculăm:

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}63}{\sqrt{9}} = \frac{1{,}63}{3} \approx 0{,}54.$$

Deoarece avem $0{,}136 < 0{,}54$, adică:

$$\max \left| F_n(y) - F(y) \right| < \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}},$$

acceptăm ipoteza H_1 deci considerăm că timpul de servire a unei unități de către o stație are o distribuție exponențială, cu parametrul:

$$\mu = 1{,}414 \text{ muncitori în cinci minute.}$$

Modelul cercetat este deci astfel încît vom folosi formulele corespunzătoare acestui model pentru a calcula indicatorii necesari. Va trebui să determinăm pe s, numărul de stații necesare sistemului, astfel încît să se minimizeze cheltuielile medii totale.

Vom adopta punctul de vedere al considerării drept timp pierdut, pe de o parte numai a timpului de inactivitate a stațiilor, iar pe de altă parte a timpului de așteptare a unităților în fir. Astfel, sîntem conduși la rezolvarea următoarei probleme de programare matematică:

$$[\min]\ \Gamma_{(s)} = (s - \rho)c_s + \bar{n}_f \cdot c_a, \qquad s \in N,$$

unde cu c_s am notat salariul unui distribuitor, respectiv cu c_a salariul unui muncitor, pe unitatea de timp (cinci minute).

De asemenea, avem:

$$\lambda = 7{,}722,$$

$$\mu = 1{,}414.$$

Calculăm mai întîi:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \approx 5{,}461.$$

Cum în modelul folosit trebuie să avem $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$, va trebui să considerăm pentru s valori naturale superioare lui cinci:

$$s \geqslant 6, \qquad s \in N.$$

Folosind și formulele pentru determinarea lui p_0, apoi a cantităților $\bar{t}_f$ și $\bar{n}_f$, de la modelul folosit, se obțin rezultatele conținute în tabelul IV.34, în care ca unitate de timp este folosită cantitatea de cinci minute. După cum se vede, timpul mediu de așteptare în fir nu este mare pentru nici o valoare folosită pentru s.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV.34

s	$s-\rho$	p_0	$\bar{i}_f$	$\bar{n}_f$
6	0,539	0,0019	1,026	7,9228
7	1,539	0,0037	0,177	1,3668
8	2,539	0,00395	0,068	0,5251
9	3,539	0,00414	0,025	0,172

Să notăm, conform cerințelor problemei:

$$c_a = k \cdot c_s,$$

avînd $k = 1$ pentru cazul în care salariile unui muncitor și unui distribuitor sînt egale și $k=2$ în cazul în care salariul unui muncitor este de două ori mai mare decît al unui distribuitor. Cu aceste notații, funcția de eficiență folosită capătă forma următoare:

$$\Gamma_{(s)} = c_s\,(s-\rho + \bar{n}_f \cdot k), \qquad s \in N, \qquad s \geqslant 6.$$

În tabelul IV.35 s-au calculat valorile acestei funcții, pentru cazurile $k=1$ și $k=2$, folosind pentru s valorile 6, 7, 8 și 9, cu ajutorul rezultatelor din tabelul IV.34. Valorile optime ale lui $\Gamma_{(s)}$ pentru cazurile $k=1$ și $k=2$ sînt marcate în tabel prin steluțe. Se observă deci că, pentru salarii egale ale muncitorilor și distribuitorilor, numărul mediu de distribuitori este șapte, iar pentru un salariu al muncitorului de două ori mai mare decît al distribuitorului, numărul optim de distribuitori este opt.

Tabelul IV.35

s	$\Gamma_{(s)}$	$k=1$	$k=2$
6	$c_s\ (0{,}539+7{,}9228\ k)$	$8{,}462\ c_s$	$16{,}385\ c_s$
7	$c_s\ (1{,}539+1{,}3668\ k)$	$2{,}908\ c_s$	$4{,}273\ c_s$
8	$c_s\ (2{,}539+0{,}5251\ k)$	$3{,}064\ c_s$	$3{,}589\ c_s$
9	$c_s\ (3{,}539+0{,}172\ k)$	$3{,}711\ c_s$	$3{,}883\ c_s$

Problema 21. Sosirea pieselor la o mașină, pentru prelucrare, este de natură poissoniană, cu media de trei piese pe oră. Timpul de prelucrare a unei piese, de către mașină, are o distribuție exponențială, mașina putînd prelucra în medie 4,5 piese pe oră.

Datorită faptului că mașina s-a uzat, se înlocuiește cu o altă mașină, de alt tip. Pentru a determina natura distribuției timpului în care noua mașină prelucrează o piesă, se măsoară timpul de prelucrare a 70 piese alese la întîmplare, obținîndu-se și datele din tabelul IV.36.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV.36

Interval în care se găsește timpul de prelucrare (în minute)	Număr de observații	Interval în care se găsește timpul de prelucrare (în minute)	Număr de observații
(10;10,5]	1	(13,5;14]	16
(10,5;11]	3	(14;14,5]	5
(11;11,5]	2	(14,5;15]	2
(11,5;12]	4	(15;15,5]	1
(12;12,5]	7	(15,5;16]	1
(12,5;13]	10	(16;16,5]	—
(13;13,5]	17	(16,5;17]	1

a) Să se cerceteze fenomenul de așteptare a pieselor sosite pentru prelucrare la vechea mașină.

b) Să se testeze dacă timpul de prelucrare a unei piese la noua mașină mai are o distribuție exponențială. În caz contrar, să se găsească natura acestei distribuții.

c) Să se cerceteze fenomenul de așteptare a pieselor sosite pentru prelucrare la noua mașină și să se compare valorile indicatorilor cu valorile corespunzătoare ale vechilor indicatori.

Rezolvare. a) Fenomenul de așteptare a pieselor la vechea mașină are o distribuție poissoniană a sosirilor și o distribuție exponențială a timpului de servire. Vom folosi formulele de la modelul cu un fir de așteptare, o stație, populație infinită:

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4{,}5 - 3} = 2 \text{ piese},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{9}{4{,}5(4{,}5 - 3)} \approx 1{,}333 \text{ piese},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4{,}5(4{,}5 - 3)} = 0{,}444 \text{ ore} \approx 26{,}6 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4{,}5 - 3} \approx 0{,}667 \text{ ore} \approx 40 \text{ minute}.$$

b) Pentru testarea ipotezei H_0, că timpul y de prelucrare a unei piese, de către noua mașină, are o distribuție exponențială, se începe completarea tabelului IV.37, ca în problemele precedente. Folosind totalurile acestui tabel, obținem mai întîi:

$$\bar{y} = \frac{919}{70},$$

deci estimăm pe μ prin valoarea

$$\mu = \frac{1}{\bar{y}} = \frac{70}{919} \approx 0{,}076 \text{ piese/minut}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul IV.37

Interval	y	N_y	$y \cdot N_y$	$F_n(y)$	$F(y)$	$\lvert F_n(y)-F(y)\rvert$
(10;10,5]	10,25	1	10,25	0,014	0,550	$\overline{\lvert 0{,}536 \rvert}$
(10,5;11]	10,75	3	32,25	0,057	0,565	0,508
(11;11,5]	11,25	2	22,50	0,086	0,583	0,497
(11,5;12]	11,75	4	47,00	0,143	0,599	0,456
(12;12,5]	12,25	7	85,75	0,243	0,614	0,371
(12,5;13]	12,75	10	127,50	0,386	0,628	0,242
(13;13,5]	13,25	17	225,25	0,628	0,642	0,014
(13,5;14]	13,75	16	220,00	0,857	0,655	0,202
(14;14,5]	14,25	5	71,25	0,928	0,668	0,260
(14,5;15]	14,75	2	29,50	0,957	0,681	0,276
(15;15,5]	15,25	1	15,25	0,971	0,693	0,278
(15,5;16]	15,75	1	15,75	0,986	0,704	0,282
(16;16,5]	16,25	0	0	0,986	0,715	0,271
(16,5;17]	16,75	1	16,75	1,000	0,727	0,273
Total	—	70	919,00	—	—	—

Cu ajutorul acestei valori a fost completat tot tabelul IV.37, din care rezultă:

$$\max \mid F_n(y) - F(y) \mid = 0{,}536.$$

Considerînd același nivel de semnificație, ca în problemele precedente, $\varepsilon = 0{,}01$, deci aceeași valoare $\lambda_0 = 1{,}63$, calculăm:

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}63}{14} \approx 0{,}435.$$

Avem următoarea situație:

$$\max \mid F_n(y) - F(y) \mid > \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}},$$

deci ipoteza H_0 se infirmă. Rezultă că distribuția timpului de prelucrare a unei piese nu poate fi considerată ca exponențială. Histograma distribuției empirice, din figura IV.5, sugerează o distribuție normală. Facem deci o nouă ipoteză, H_1, anume că timpul de prelucrare a unei piese de către noua mașină are o distribuție normală, ipoteză pe care urmează să o testăm.

Valoarea medie a distribuției timpului y se estimează prin:

$$\bar{y} = \frac{919}{70} \approx 13{,}13 \text{ minute}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru estimarea dispersiei, s-a construit tabelul IV.38 din care deducem:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_y (y-\bar{y})^2 \cdot N_y = \frac{89{,}208}{70} \approx 1{,}2744 \text{ minute.}$$

De aici scoatem și valoarea

$$\sigma = \sqrt{1{,}2744} \approx 1{,}116 \text{ minute.}$$

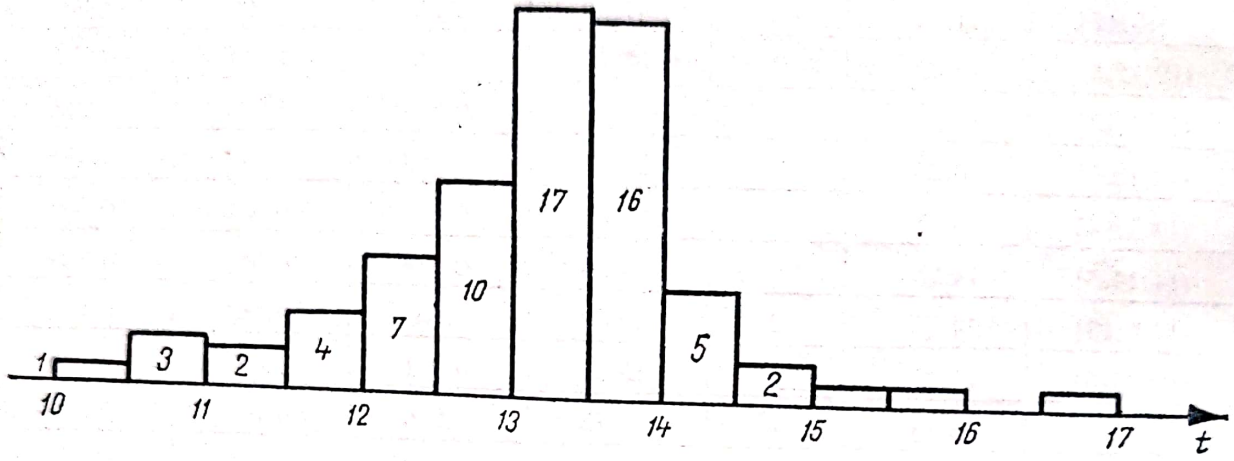


Fig. IV.5

Tabelul IV.38

y	N_y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$(y-\bar{y})^2 N_y$
10,25	1	−2,88	8,2944	8,2944
10,75	3	−2,38	5,6644	16,9932
11,25	2	−1,88	3,5344	7,0688
11,75	4	−1,38	1,9044	7,6176
12,25	7	−0,88	0,7744	5,4208
12,75	10	−0,38	0,1444	1,4400
13,25	17	0,12	0,0144	0,2448
13,75	16	0,62	0,3844	6,1504
14,25	5	1,12	1,2544	6,2720
14,75	2	1,62	2,6244	5,2488
15,25	1	2,12	4,4944	4,4944
15,75	1	2,62	6,8544	6,8544
16,25	0	3,12	9,7344	0
16,75	1	3,62	13,1044	13,1044
Total	70	—	—	89,2080

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aplicarea testului lui Kolmogorov, s-a calculat tabelul IV.39, în care s-au considerat drept valori y marginile din dreapta ale intervalelor. Pentru calculul valorilor funcției teoretice de repartiție, s-a folosit formula:

$$F(y) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma}\right),$$

Tabelul IV.39

y	$y-\bar{y}$	$\frac{y-\bar{y}}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma}\right)$	$F(y)$	$F_n(y)$	$\lvert F_n(y)-F(y)\rvert$
10,5	—2,63	—2,36	—0,491	0,009	0,014	0,005
11	—2,13	—1,91	—0,472	0,028	0,057	0,029
11,5	—1,63	—1,46	—0,428	0,072	0,086	0,014
12	—1,13	—1,01	—0,344	0,156	0,143	0,013
12,5	—0,63	—0,56	—0,212	0,288	0,243	0,045
13	—0,13	—0,11	—0,044	0,456	0,386	0,070
13,5	0,37	0,33	0,129	0,629	0,628	0,001
14	0,87	0,78	0,282	0,782	0,857	0,075
14,5	1,37	1,23	0,391	0,891	0,928	0,037
15	1,87	1,67	0,453	0,953	0,957	0,004
15,5	2,37	2,12	0,483	0,983	0,971	0,012
16	2,87	2,57	0,495	0,995	0,986	0,009
16,5	3,37	3,02	0,498	0,998	0,986	0,012
17	3,87	3,47	0,499	0,999	1,000	0,001

în care $\Phi(y)$ este funcția lui Laplace, ale cărei valori s-au găsit în tabele. S-a obținut

$$\max \mid F_n(y) - F(y) \mid = 0{,}075,$$

valoare cu mult mai mică decît:

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{n}} \approx 0{,}435\,.$$

Urmează că ipoteza H_1, a unei distribuții normale a timpului de prelucrare a unei piese de către noua mașină, trebuie acceptată. Pentru cercetarea fenomenului de așteptare corespunzător, vom folosi formulele din cazul unei distribuții oarecare a timpului de servire a unei unități, considerînd următoarele valori ca fiind cunoscute:

$$\lambda = 3 \text{ piese/oră},$$

$$\mu = \frac{1}{y} = 0{,}0761 \text{ piese/minut} = 4{,}57 \text{ piese/oră},$$

$$\sigma^2 = 1{,}2744 \text{ minute}^2 = \frac{1{,}2744}{3600} \text{ ore}^2 \approx 0{,}00035 \text{ ore}^2.$$

În plus

$$\rho = \frac{3}{4,57} \approx 0,656.$$

Obținem deci următoarele valori ale indicatorilor:

$$\bar{n} = \frac{2\rho - \rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\,(1-\rho)} \approx 1,14 \text{ piese},$$

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\,(1-\rho)} \approx 0,630 \text{ piese},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} \approx 0,2104 \text{ ore} \approx 12,62 \text{ minute},$$

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} \approx 12,62+13,13 = 25,75 \text{ minute}.$$

Aceste valori sînt trecute în tabelul IV.40, comparativ cu valorile corespunzătoare ale vechii situații. Se observă că noua mașină este superioară celei vechi, numărul mediu de piese ce așteaptă, respectiv timpul mediu de așteptare, în fir sau în sistem, fiind mult mai mici decît în vechea situație.

Tabelul IV.40

Mașina	$\bar{n}$	$\bar{n}_f$	$\bar{t}_f$	$\bar{t}_s$
Veche	2	1,333	26,6	40
Nouă	1,14	0,6308	12,62	25,75

§ 3. PROBLEME PROPUSE

1. Prin metode statistice, s-a constatat că sosirile la un punct alimentar sînt poissoniene, cu media de 20 persoane pe oră, iar timpul mediu de servire a unei persoane este de două minute, avînd o distribuție exponențială. Să se determine:

a) probabilitatea ca în sistem să nu existe nici o persoană la un moment dat;

b) probabilitatea ca în sistem să existe cinci persoane la un moment dat;

c) probabilitatea ca o persoană ce sosește în sistem să nu poată fi servită imediat.

Soluție: a) 33,3%; b) 4,3%; c) 66,7%.

2. Sosirile pieselor la controlul CTC se desfășoară după o lege poissoniană, cu media de zece piese pe oră, iar timpul de control pentru o piesă are o distribuție exponențială, cu media de cinci minute.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine timpul mediu de așteptare al unei piese în sistemul de așteptare format.

b) Să se calculeze probabilitatea ca numărul pieselor, aflate la un moment dat în sistem, să fie mai mare de 2.

Soluție: a) 30 minute; b) 58%.

3. Sosirile cumpărătorilor la un centru de lapte în primele ore ale zilei sînt poissoniene, cu media $\lambda = 75$ persoane pe oră, iar timpul mediu de servire a unui cumpărător este de 30 secunde, acest timp avînd o distribuție exponențială.

a) Să se determine probabilitatea ca în sistemul de așteptare să existe cel mult cinci cumpărători la un moment dat.

b) Să se determine probabilitatea ca un cumpărător să nu aștepte mai mult de cinci minute.

Soluție: a) 40,4%; b) 98,5%.

4. Într-o secție mecanică a unei întreprinderi industriale există patru mașini specializate în prelucrarea unor piese solicitate. Deoarece întreprinderea dorește să organizeze secția astfel încît numărul pieselor ce așteaptă la un moment dat să fie prelucrate să nu fie prea mare, se face o cercetare în acest scop, găsindu-se că legea sosirilor pieselor este poissoniană, cu parametrul $\lambda = 10$ piese pe oră, iar legea timpului de prelucrare a unei piese este exponențială cu $\mu = 5$ piese pe oră. Să se determine:

a) probabilitatea ca în secție să nu existe nici o piesă neprelucrată la un moment dat;

b) probabilitatea ca în secție să nu existe nici o piesă care să aștepte să intre la prelucrat;

c) numărul mediu de piese care așteaptă să intre la prelucrat la un moment dat, precum și numărul mediu de piese neprelucrate care există în secție la un moment dat;

d) timpul mediu de așteptare a unei piese, pînă intră la prelucrat, precum și timpul mediu petrecut de piesă în secție.

Soluție: a) 13%; b) 91%; c) 0,17 piese și 2,17 piese; d) un minut și o secundă, respectiv 13 minute și o secundă.

5. Într-o uzină modernă, unui muncitor i-au fost repartizate pentru control trei strunguri. Pentru fiecare strung în parte s-a stabilit că distribuția de probabilitate a timpului de funcționare pînă în momentul cînd strungul se dereglează este poissoniană, avînd media de patru ore. Datele statistice arată că timpul mediu necesar unei reglări este de 30 minute, iar distribuția acestui timp este de natură exponențială.

Strungurile se dereglează în mod întîmplător dînd naștere la un fenomen de așteptare, în care unitățile sînt chiar strungurile care așteaptă să fie reglate, iar muncitorul este stația de servire.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se determine probabilitatea ca în sistemul de aşteptare să nu existe nici un strung.

b) Să se determine probabilitatea ca la un moment dat toate cele trei strunguri să fie dereglate.

Soluţie: a) 67,5% ; b) 0,74%.

6. Unui muncitor i-au fost repartizate pentru control cinci maşini de calcul automate.

Pentru fiecare maşină de calcul, s-a stabilit că distribuţia timpului de funcţionare, pînă în momentul dereglării, este exponenţială, cu media de şase ore. Timpul mediu necesar unei reglări este de 30 minute, iar distribuţia acestui timp este exponenţială.

a) Să se determine probabilitatea ca în sistemul de aşteptare format să nu existe nici o maşină.

b) Să se determine probabilitatea ca, la un moment dat, toate cele cinci maşini să fie dereglate.

Soluţie: a) 6,3% ; b) 0,002%.

7. Într-o secţie a unei întreprinderi din industria constructoare de maşini, există patru strunguri pentru prelucrarea unor piese. Sosirea pieselor la prelucrare urmează o lege cu distribuţie poissoniană, cu media de 15 piese pe oră, iar timpul de prelucrare a unei piese auto o variabilă aleatoare exponenţială, cu media de 12 minute. Să se determine:

a) probabilitatea ca în secţie să nu existe nici o piesă neprelucrată, la un moment dat;

b) numărul mediu de piese care aşteaptă să intre la prelucrat la un moment dat, precum şi numărul mediu de piese neprelucrate care există în secţie la un moment dat.

Soluţie: a) 3,8%; b) 1,54 piese, respectiv 4,54 piese.

8. În cadrul unei balastiere se găsesc şase agregate, iar pentru înlăturarea defecţiunilor ivite, există un singur mecanic. Agregatele au parametrul de defectare corespunzător distribuţiei Poisson, $\lambda = 0{,}03$ agregate pe oră, iar mecanismul exercită serviciul de repartiţii după o lege exponenţială, cu $\mu = 0{,}3$ agregate pe oră.

a) Să se calculeze probabilitatea ca nici unul dintre cele şase utilaje să nu fie defect, la un moment dat.

b) Să se calculeze probabilitatea ca la un moment dat să fie defecte toate cele şase utilaje.

c) Să se calculeze numărul mediu de agregate defecte la un moment dat, care se găsesc în firul de aşteptare, respectiv în sistemul de aşteptare format.

d) Să se calculeze timpul mediu de aşteptare a unui agregat în fir.

Soluţie: a) 48,6% ; b) 0,032% ; c) 0,346 agregate, respectiv 0,86 agregate; d) 2 ore şi 20 minute, respectiv 5 ore şi 40 minute.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. HILLIER, FREDERIK S., „*The Application of Waiting Line Theory to Industrial Problems*", Journal of Ind. Eng., 15 No. 1,1964.
2. MORSE PHILIP M., „*Queues, Inventories and Maintenace*", *Wiley*, New-York, 1961.
3. SAATY, THOMAS L., „*Elements of Queuing Theory*", McGraw-Hill, New-York, 1961.
4. WOLFF, RONALD W., „*Problems of Statistical Inference for Birth and Death Queing Models*", Op. Res. 13, No. 2, 1965.
5. COX D. R. and SMITH WALTER L., „*Queues*", *Wiley*, New-York, 1961.
6. SYSKI R., „*Introduction to Congestion Theory in Telephone Sistems*", Oliver and Boyd, Edinburg and London, 1960.
7. LEC A. M., „*Applied Queing Theory*", *MacMillan*, London Melbourne, Toronto, 1965.
8. MIHOC GH. şi alţii, „*Introducere în teoria aşteptării*", Bucureşti, Ed. Tehnică, 1967.
9. VĂDUVA I. şi alţii, „*Modele matematice în organizarea şi conducerea producţiei*", Ed. Didactică şi Pedagogică, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL

Introducere 3

Cap. I. **Probleme care folosesc tehnica simplex** 5
§ 1. Probleme care cer programe optime întregi. 5
§ 2. Probleme rezolvate. 8
§ 3. Probleme propuse. 45
§ 4. Probleme în care funcţia de eficienţă este liniară pe porţiuni. . . 48
§ 5. Probleme rezolvate. 50
§ 6. Probleme propuse. 71
§ 7. Probleme de programare neliniară. 73
§ 8. Probleme rezolvate. 76
§ 9. Probleme propuse. 94
Bibliografie 96

Cap. II. **Probleme care folosesc tehnici specifice teoriei reţelelor** 97
§ 1. Probleme care folosesc algoritmi ai drumurilor optimale 97
§ 2. Probleme rezolvate 106
§ 3. Probleme propuse 136
§ 4. Probleme de rute optime trecînd prin noduri specificate 141
§ 5. Probleme rezolvate 143
§ 6. Probleme propuse 159
§ 7. Probleme care cer determinarea unui flux maxim, cu cost total minim, într-o reţea de flux 163
§ 8. Probleme rezolvate. 166
§ 9. Probleme propuse. 182
Bibliografie 186

Cap. III. **Probleme de inventar** 188
§ 1. Probleme care cer optimizarea stocurilor de producţie 188
§ 2. Probleme rezolvate. 192
§ 3. Probleme propuse 211
Bibliografie 218

Cap. IV. **Probleme care cercetează aşteptarea** 219
§ 1. Modele de aşteptare. 219
§ 2. Probleme rezolvate. 224
§ 3. Probleme propuse. 290
Bibliografie 293

Scanned with OKEN Scanner

Lei 12,60

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1975

Scanned with OKEN Scanner